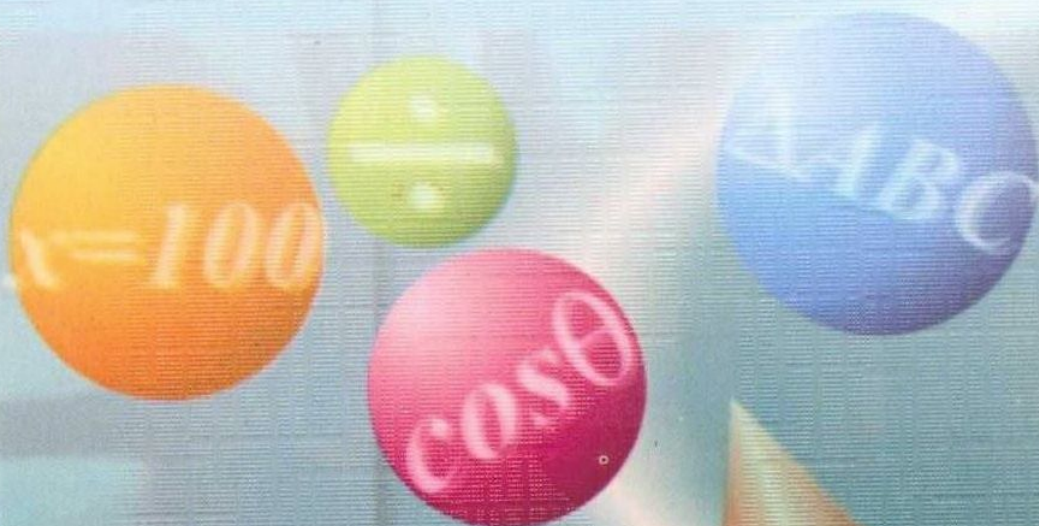


NGUYỄN VĂN NHO (Chủ biên)
NGUYỄN VĂN THỔ

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI **MÔN TOÁN**

TUYỂN SINH ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG
TỪ NĂM HỌC 2002 ĐẾN NĂM 2007



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Nguyễn Văn Nho (Chủ biên)

Nguyễn Văn Thỏ



HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN

**TUYỂN SINH ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG
TỪ NĂM HỌC 2002 ĐẾN NĂM 2007**

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội
Điện thoại : (04) 9 724852 – (04) 9 724770 – Fax: (04) 9 714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc : PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập : NGUYỄN BÁ THÀNH

Biên tập
Hải Đăng

Chế bản
NS. Bình Thạnh

Trình bày bìa
Xuân Duyên

Tổng phát hành : Công ty TNHH DỊCH VỤ VĂN HÓA KHANG VIỆT
Địa chỉ :
2bisA Đinh Tiên Hoàng - P.Đakao - Q.1 - TP.HCM
ĐT : 08 9111564 - Fax : 08 9102915

Hướng dẫn giải đề thi MÔN TOÁN TS ĐH – CĐ từ năm 2002 - 2007

Mã số : 1L – 265 ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16×24 cm, tại XN in TÂN BÌNH.

Số xuất bản : 949 – 2007/CXB/01 – 161/ĐHQGHN ngày 29/11/2007.

Quyết định xuất bản số : 734 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý I năm 2008.

ĐỀ SỐ 1

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI A, 2002

Câu I. (Đại học : 2,5 điểm, Cao đẳng : 3,0 điểm)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm k để phương trình: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Câu II. (Đại học : 1,5 điểm, Cao đẳng : 2,0 điểm)

Cho phương trình :

$$\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \quad (2) \quad (m \text{ là tham số})$$

1. Giải phương trình (2) khi $m = 2$.
2. Tìm m để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1 ; 3^{\sqrt{3}}]$.

Câu III. (Đại học : 2,0 điểm, Cao đẳng : 2,0 điểm)

1. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình :

$$5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3.$$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$

Câu IV. (Đại học : 2,0 điểm, Cao đẳng : 3,0 điểm)

1. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC . Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ cho hai đường thẳng :

$$\Delta : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

- a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .
- b) Cho điểm $M(2; 1; 4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

Câu V. (Đại học : 2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy , xét tam giác ABC vuông tại A , phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc

trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

2. Cho khai triển nhị thức :

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} \left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \dots + C_n^{n-1} \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right) \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương)

Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm n và x.

Ghi chú : Thí sinh chỉ thi cao đẳng không làm Câu V.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có : $y = -x^3 + 3x^2$

- Miền xác định : $D = \mathbb{R}$
- $y' = -3x^2 + 6x$
- $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$
- Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$		4		$-\infty$

- Tính lời lỗm và điểm uốn:
 $y'' = -6x + 6$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	+	0	-
Đồ thị	lỗm	Đ.U $I(1;2)$	lồi

- Điểm đặc biệt: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$

• Đồ thị hình bên

2. Tìm k.

Xét phương trình :

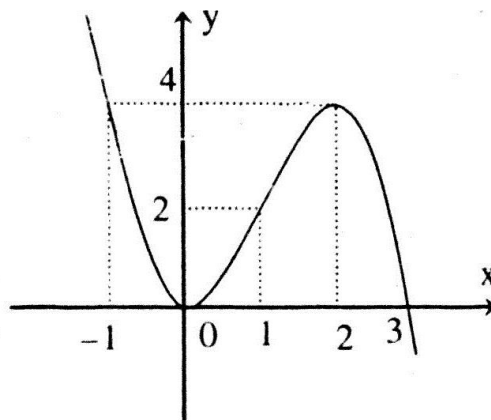
$$-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2$$

Số nghiệm của phương trình (*)

là số giao điểm của đồ thị (C) với

đường thẳng $y = -k^3 + 3k^2$



Dựa vào đồ thị, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < -k^3 + 3k^2 < 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -k^3 + 3k^2 > 0 \\ k^3 - 3k^2 + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k < 3, k \neq 0 \\ k > -1, k \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0, k \neq 2 \end{cases}$$

Cách khác:

Ta có : (*) $\Leftrightarrow (x - k)[x^2 + (k - 3)x + k^2 - 3k] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ g(x) = x^2 + (k - 3)x + k^2 - 3k = 0 \quad (**) \end{cases}$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có 2 nghiệm phân biệt khác k

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = (k - 3)^2 - 4(k^2 - 3k) > 0 \\ g(k) = 3k^2 - 6k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k^2 - 6k - 9 < 0 \\ 3k(k - 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0, k \neq 2 \end{cases}$$

3. Viết phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị

Ta có: $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3mx + m^2 - 1 = 0 \quad (*)$$

$$\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 > 0, \forall m \Rightarrow \text{Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu}$$

Lấy y chia y' , ta được : $y = \frac{1}{3}(x - m)y' + 2x + m - m^2$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số thì x_1, x_2 là nghiệm của của (*).

Ta có :

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{3}(x_1 - m)y'(x_1) + 2x_1 + m - m^2 \\ y'(x_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y_1 = 2x_1 + m - m^2$$

Tương tự : $y_2 = 2x_2 + m - m^2$

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là : $y = 2x - m^2 + m$.

Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Xét : } \log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0 \quad (2)$$

Điều kiện : $x > 0$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\log_3^2 x + 1} \quad (t \geq 1) \Rightarrow \log_3^2 x = t^2 - 1$$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 + t - 2m - 2 = 0 \quad (*)$$

$$\text{Khi } m = 2 : (*) \Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{\log_3^2 x + 1} = 2 \Leftrightarrow \log_3^2 x = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = \sqrt{3} \\ \log_3 x = -\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{\sqrt{3}} \\ x = 3^{-\sqrt{3}} \end{cases}$$

Vậy khi $m = 2$, phương trình có nghiệm : $x = 3^{\sqrt{3}} \vee x = 3^{-\sqrt{3}}$.

2. Tìm m để phương trình có nghiệm

$$\text{Ta có : } 1 \leq x \leq 3^{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 \leq \log_3 x \leq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \log_3^2 x \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{\log_3^2 x + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2$$

$$\text{Khi đó : } (*) \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 2m, \quad t \in [1; 2]$$

$$\text{Xét hàm số : } f(t) = t^2 + t - 2, \quad t \in [1; 2]$$

$$f'(t) = 2t + 1 > 0, \quad \forall t \in [1; 2]$$

Bảng biến thiên :

t	1	2
$f'(t)$		+
$f(t)$		4
	0	

Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu của bài toán

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2.$$

Câu III.

1. Tìm nghiệm $x \in (0; 2\pi)$

$$\text{Điều kiện : } 1 + \sin 2x \neq 0$$

$$\text{Ta có : } \cos 3x + \sin 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

$$= 4(\cos^3 x - \sin^3 x) - 3(\cos x - \sin x)$$

$$= (\cos x - \sin x)[4(1 + \sin x \cos x) - 3]$$

$$= (\cos x - \sin x)(1 + 2\sin 2x)$$

$$\text{Do đó : } 5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5 \left[\sin x + \frac{(\cos x - \sin x)(1 + 2 \sin 2x)}{1 + 2 \sin 2x} \right] = \cos 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow 5(\sin x + \cos x - \sin x) = 2 \cos^2 x + 2 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ (loại)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Do } x \in (0; 2\pi) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}$.

2. Tính diện tích hình phẳng

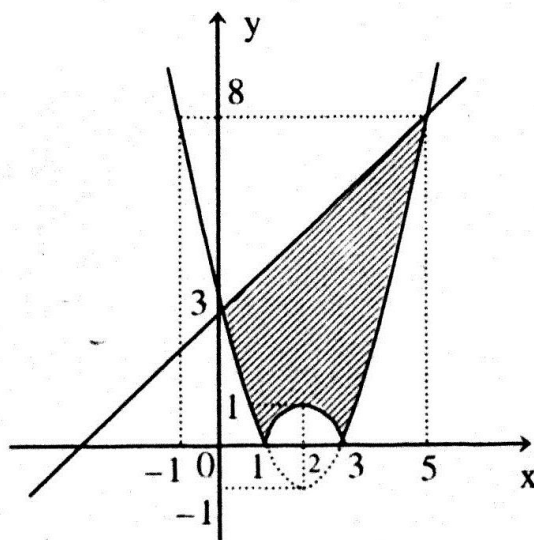
Đặt (P) : $y = |x^2 - 4x + 3|$ và (d) : $y = x + 3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) : $|x^2 - 4x + 3| = x + 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 - 5x + 3 = x + 3 \\ x^2 - 4x + 3 = -x - 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \begin{cases} x^2 - 5x = 0 \\ x^2 - 3x + 6 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = 5 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị, ta có diện tích cần tìm :

$$S = \int_0^1 [x + 3 - (x^2 - 4x + 3)] dx + \int_1^3 [x + 3 - (-x^2 + 4x - 3)] dx + \int_3^5 [x + 3 - (x^2 - 4x + 3)] dx$$

$$= \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx$$

$$= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_1^3 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_3^5$$

$$S = \frac{109}{6} \text{ (đvdt)}.$$

Câu IV.

1. Tính diện tích ΔAMN

M, N lần lượt

Gọi I là trung điểm BC và $H = SI \cap MN$

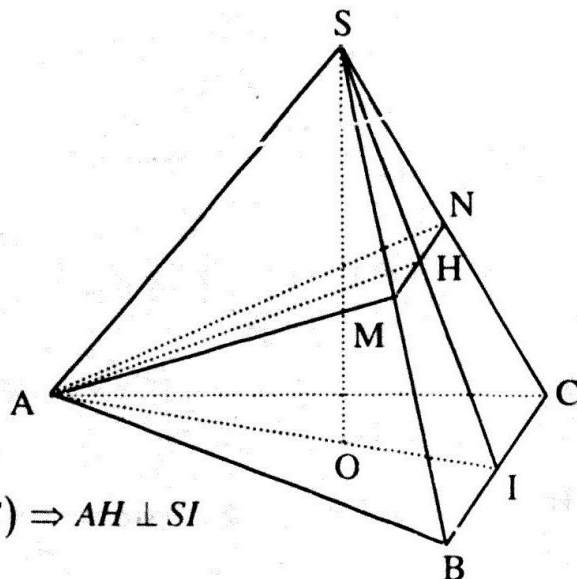
$\Rightarrow H$ là trung điểm SI và MN

Ta có : $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AM = AN$

$\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại A $\Rightarrow AH \perp MN$

Mặt khác :

$$\begin{cases} (AMN) \perp (SBC) \\ (AMN) \cap (SBC) = MN \\ AH \subset (AMN) \\ AH \perp MN \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SI$$



ΔSAI có AH vừa là đường cao, vừa là trung tuyến nên cân tại A

$$\Rightarrow SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta SIB \text{ vuông tại I, ta có: } SI = \sqrt{SB^2 - IB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

ΔAHI vuông tại H, ta có :

$$AH = \sqrt{AI^2 - IH^2} = \sqrt{AI^2 - \left(\frac{SI}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Ngoài ra : } MN = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$$

$$\text{Diện tích } \Delta AMN \text{ là : } S = \frac{1}{2} AH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \text{ (dvd)}.$$

2. a) Viết phương trình mặt phẳng (P)

Δ_1 qua điểm A(0; -2; 0) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3; 4)$

Δ_2 qua điểm B(1; 2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1; 1; 2)$

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của (P), ta có :

$$\begin{cases} (P) \supset \Delta_1 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{a} \\ (P) \supset \Delta_2 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = (2; 0; -1)$$

Phương trình mặt phẳng (P) qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ là:

$$2 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y + 2) - (z - 0) = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0.$$

b) Tìm tọa độ của H

$$H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1+t; 2t+2; 1+2t) \Rightarrow \overrightarrow{MH} = (t-1; t+1; 2t-3)$$

a có :

$$MH = \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} = \sqrt{6(t^2 - 12t + 11)} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5} \geq \sqrt{5}$$

$\Rightarrow \min MH = \sqrt{5}$, đạt được khi $t = 1$

điểm cần tìm là $H(2; 4; 3)$.

âu V.

Tìm :

a có : $BC \cap Ox = B(1; 0)$.

Đặt $A(a; 0) \in Ox$ ($a \neq 1$)

$\triangle ABC$ vuông tại A (thuộc Ox) nên $x_C = x_A = a$

$$C \in (BC) \Rightarrow y_C = \sqrt{3}(a-1)$$

ọa độ trọng tâm G :

$$G: \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2a+1}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$$

a có : $AB = |a-1|$, $AC = \sqrt{3}|a-1|$, $BC = 2|a-1|$

Diện tích tam giác ABC là $S = pr$, với $\begin{cases} p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}|a-1| \\ r = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}AB \cdot AC = pr \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |a-1| \cdot \sqrt{3}|a-1| = \frac{3+\sqrt{3}}{2}|a-1| \cdot 2$$

$$\Rightarrow |a-1| = 2 + 2\sqrt{3} \text{ (do } a \neq 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 + 2 + 2\sqrt{3} \\ a = 1 - 2 - 2\sqrt{3} \end{cases}$$

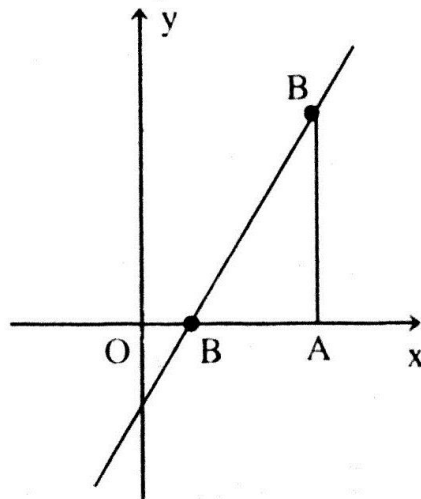
$$\text{Với } a = 1 + 2 + 2\sqrt{3} \Rightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{Với } a = 1 - 2 - 2\sqrt{3} \Rightarrow G_2\left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$$

Vậy có hai điểm G cần tìm : $G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right), G_2\left(\frac{-1-4\sqrt{3}}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$.

2. Tìm m và x

Ta có : $C_n^3 = 5C_n^1$ ($n \in N^*$ và $n \geq 3$)



$$\Leftrightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 5n \quad \Leftrightarrow \frac{(n-3)!(n-1)(n-2)n}{6(n-3)!} = 2n$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \quad \Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = -4 (\text{loại}) \\ n = 7 \end{cases} \Leftrightarrow n = 7$$

Với $n = 7$, ta có : $\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{2}} \right)^n = \left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{2}} \right)^7$

Số hạng tổng quát : $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_7^k \cdot \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right)^{7-k} \cdot \left(2^{\frac{-x}{2}} \right)^k$

Số hạng thứ tư là : $T_4 = C_7^3 \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right)^4 \cdot \left(2^{\frac{-x}{2}} \right)^3 = C_7^3 \cdot 2^{x-2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow C_7^3 \cdot 2^{x-2} = 20n = 20 \cdot 7$

$$\Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4$$

Vậy : $n = 7, x = 4$.

ĐỀ SỐ 2

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI B, 2002

Câu I. (Đại học: 2,0 điểm ; Cao đẳng : 2,5 điểm).

Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1) (m là tham số)

- . Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
- . Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

Câu II. (Đại học: 3,0 điểm ; Cao đẳng : 3,0 điểm)

- . Giải phương trình : $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.
- . Giải bất phương trình : $\log_x \left[\log_3 (9^x - 72) \right] \leq 1$.
- . Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

Câu III. (Đại học: 1,0 điểm ; Cao đẳng : 1,5 điểm).

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \text{ và } y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}.$$

Câu IV. (Đại học: 3,0 điểm ; Cao đẳng: 3,0 điểm).

- . Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.
- . Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng a.
 - a). Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D .
 - b). Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh B_1B , CD , A_1D_1 . Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N .

Câu V. (Đại học: 1,0 điểm).

Cho đa giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \geq 2$, n nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. Tìm n .

Ghi chú : Thí sinh chỉ thi cao đẳng không làm Câu IV 2.b) và Câu V.

GIẢI

Câu I.

. **Khảo sát hàm số khi $m = 1$**

Chỉ $m = 1$, ta có : $y = x^4 - 8x^2 + 10$

Tìm n.

a có : $y = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\begin{aligned} & 2m \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \Delta_g = -2m(m^2 - 9) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < -3 \text{ hay } 0 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \\ & f(0) = m^2 - 9 \neq 0 \end{aligned}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m < -3 \vee 0 < m < 3$.

Đề II. . Giải phương trình

a có: $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 8x) = \frac{1}{2}(1 - \cos 10x) - \frac{1}{2}(1 + \cos 12x)$$

$$\Rightarrow \cos 8x + \cos 6x = \cos 12x + \cos 10x \Leftrightarrow 2\cos 7x \cos x = 2\cos 11x \cos x$$

$$\Rightarrow (\cos 11x - \cos 7x) \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow -2\sin 9x \sin 2x \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 9x = 0 \\ \sin 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x = k\pi \\ 2x = l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{9} \\ x = l\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $\begin{cases} x = k\frac{\pi}{9} \\ x = l\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$

. Giải bất phương trình

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \log_9 73$

$$\text{Thi đó: } \log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1 \Leftrightarrow \log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq \log_x x$$

$$\Leftrightarrow \log_3(9^x - 72) \leq x \Leftrightarrow 3^{2x} - 3^x - 72 \leq 0 \Leftrightarrow 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2$$

Do với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là : $\log_9 73 < x \leq 2$.

3. Giải hệ phương trình

$$\text{Xét: } \begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x+y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \geq 0 \\ (x-y)^2 = (x-y)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y \geq 0 \\ (x-y)^2(x-y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y \vee \begin{cases} x-y \geq 0 \\ y=x-1 \end{cases}$$

• Với $x=y$:

$$(2) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{2x+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \geq 0 \\ 2x+2 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x=1 \vee x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$$

• Với $y=x-1, x-y \geq 0$: $(2) \Leftrightarrow 2x-1 = \sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 2x+1 = (2x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ x=0 \vee x = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{ (thỏa } x-y \geq 0)$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu III. Tính diện tích hình phẳng

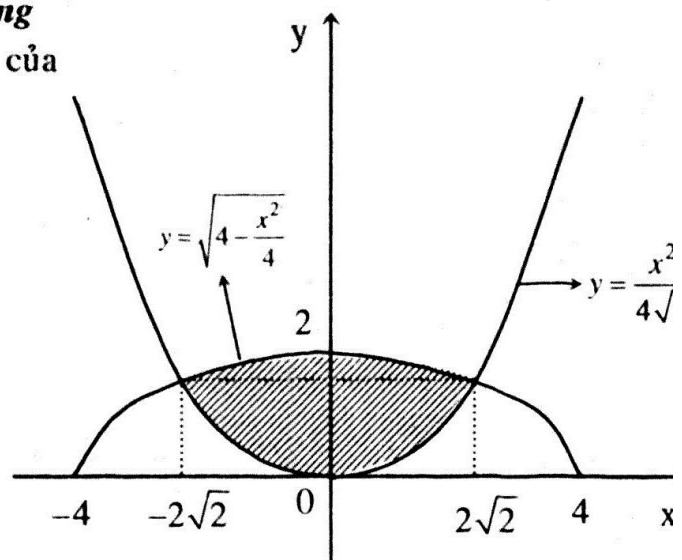
Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong:

$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^2 - 128 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 8 \\ x^2 = -16 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2} \end{cases}$$



Đưa vào lỗ thì ta có diện tích cần tìm:

$$S = 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{16 - x^2} \right) dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dx$$

$$= \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{6\sqrt{2}} x^3 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = S_1 - \frac{8}{3}$$

Ánh $S_1 = \int_0^{2\sqrt{2}} \left(\sqrt{16 - x^2} \right) dx$

Đặt $x = 4 \sin t \Rightarrow dx = 4 \cos t dt, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$

Đối cận

x	0	$2\sqrt{2}$
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$S_1 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{16(1 - \sin^2 t)} \cos t dt = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= 8 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4$$

Vậy: $S = 2\pi + 4 - \frac{8}{3} = 2\pi + \frac{4}{3} \text{ (đvdt)}.$

Câu IV.

. Tìm tọa độ các đỉnh

Điểm H là hình chiếu vuông góc của I lên AB

H là trung điểm của cạnh AB

$$IH \perp AB \Rightarrow IH: 2x + y + C = 0$$

$$I \in H \Leftrightarrow C = -1 \Rightarrow IH: 2x + y - 1 = 0$$

Tọa độ của H thỏa hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(0; 1)$$

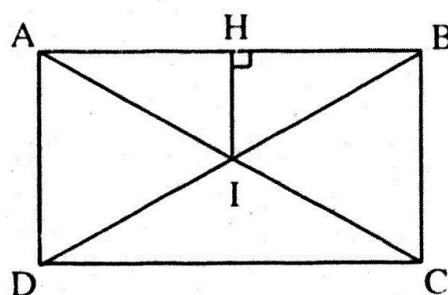
$$\Rightarrow IH = \sqrt{\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + (1 - 0)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ta có: $AB = 2AD = 4IH = 2\sqrt{5}$

$$A \in AB \Rightarrow A(2t - 2; t), \text{ do } x_A < 0 \Rightarrow t < 1$$

I là trung điểm của AB nên:

$$\begin{cases} x_B = 2x_H - x_A = 2 - 2t \\ y_B = 2y_H - y_A = 2 - t \end{cases} \Rightarrow B(2 - 2t; 2 - t)$$



$$\text{Khi đó: } AB = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow AB^2 = 20 \Leftrightarrow (4-4t)^2 + (2-2t)^2 = 20 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \text{ (loại)} \\ t=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow A(-2;0), B(2;2)$$

I là trung điểm của AC và BD nên ta có :

$$\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 3 \\ y_C = 2y_I - y_A = 0 \end{cases} \Rightarrow C(3;0)$$

$$\begin{cases} x_D = 2x_I - x_B = 1-2 = -1 \\ y_D = 2y_I - y_B = 0-2 = -2 \end{cases} \Rightarrow D(-1;-2)$$

Vậy các đỉnh của hình chữ nhật là : $A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$.

Cách khác

ΔIHA vuông tại H, ta có:

$$IA = \sqrt{AH^2 + HI^2} = \sqrt{\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + IH^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$$

Gọi (C) là đường tròn tâm I, bán kính $R = IA = \frac{5}{2}$

Phương trình đường tròn (C) có dạng: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$

Hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong đường tròn (C) nên tọa độ của A, B là giao điểm của đường thẳng AB và đường tròn (C).

Tọa độ của A, B thỏa hệ:.

$$\begin{cases} x-2y+2=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-2 \\ y(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$$

Do $x_A < 0 \Rightarrow A(-2;0), B(2;2)$

I là trung điểm của AC và BD nên ta có : $C(3;0), D(-1;-2)$.

2. a) Tính khoảng cách giữa A_1B và B_1D .

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), D(0;a;0)$$

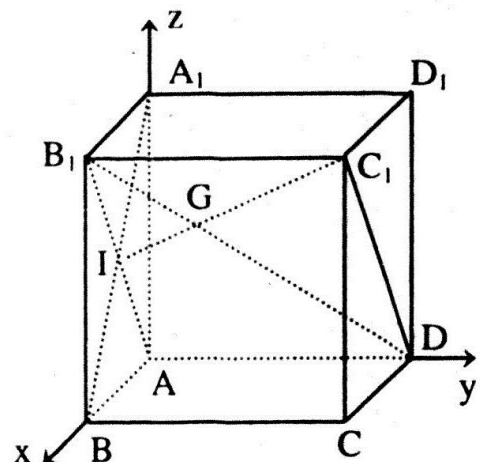
$$A_1(0;0;a), B_1(a;0;a), C_1(a;a;a), D_1(0;a;a)$$

Ta có : $\overrightarrow{A_1B} = (a;0;-a),$

$$\overrightarrow{B_1D} = (-a;a;-a),$$

$$\overrightarrow{A_1B_1} = (a;0;0)$$

$$[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}] = (a^2; 2a^2; a^2)$$



Khoảng cách giữa hai đường thẳng A_1B và B_1D :

$$d(A_1B, B_1D) = \frac{|\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{B_1D}|}{|\overrightarrow{B_1D}|} = \frac{|a^3|}{\sqrt{a^4 + 4a^4 + a^4}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

b) Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N .

M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh B_1B , CD , A_1D_1 nên ta có :

$$M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), P\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{C_1N} = \left(-\frac{a}{2}; 0; -a\right)$$

Gọi φ là góc giữa MP và C_1N , ta có :

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{C_1N}|}{|\overrightarrow{MP}| \cdot |\overrightarrow{C_1N}|} = \frac{\left| -a \cdot \left(-\frac{a}{2}\right) + \frac{a}{2} \cdot 0 + \frac{a}{2} \cdot (-a) \right|}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{4} + 0 + a^2}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Câu V. Tìm n .

Gọi đường chéo của đa giác đều đi qua tâm của (O) là đường chéo lớn.

Số đường chéo lớn của đa giác đều $2n$ đỉnh là n .

Hai đường chéo lớn của đa giác đều tạo thành một hình chữ nhật.

Do đó, số hình chữ nhật được tạo thành từ $2n$ đỉnh của đa giác đều là : C_n^2

Số tam giác có 3 đỉnh là 3 đỉnh của đa giác đều là : C_{2n}^3

Theo giả thiết, ta có : $C_{2n}^3 = 20C_n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{2n!}{3!(2n-3)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} = 20 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n = 8$$

Vậy giá trị cần tìm là : $n = 8$.

ĐỀ SỐ 3

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI D, NĂM 2002

Câu I. (Đại học: 3 điểm ; Cao đẳng : 4 điểm)

Cho hàm số : $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ (1) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) tương ứng với $m = -1$.
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.
3. Tìm m để đồ thị (1) của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

Câu II. (Đại học: 2,0 điểm ; Cao đẳng : 3 điểm)

1. Giải bất phương trình : $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$.

2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

Câu III. (Đại học: 1 điểm ; Cao đẳng : 1 điểm)

Tìm thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng phương trình :

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0.$$

Câu IV. (Đại học: 2 điểm ; Cao đẳng : 2 điểm)

1. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng

$$(P) : 2x - y + 2 = 0$$

và đường thẳng d_m :
$$\begin{cases} (2m+1)x + (1-m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Câu V. (Đại học: 2 điểm)

1. Tìm số nguyên dương n sao cho : $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy, cho elip (E) có

phương trình : $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Ghi chú: Thí sinh chỉ thi cao đẳng không làm câu V.

GIẢI

1. Khảo sát hàm số khi $m = -1$

Khi $m = -1$, ta có: $y = \frac{-3x-1}{x-1}$

• Miền xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -3 \Rightarrow y = -3$ là tiệm cận ngang

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y			$+\infty$		-3

$-3 \nearrow$ $-\infty \nearrow$

• Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = 1$

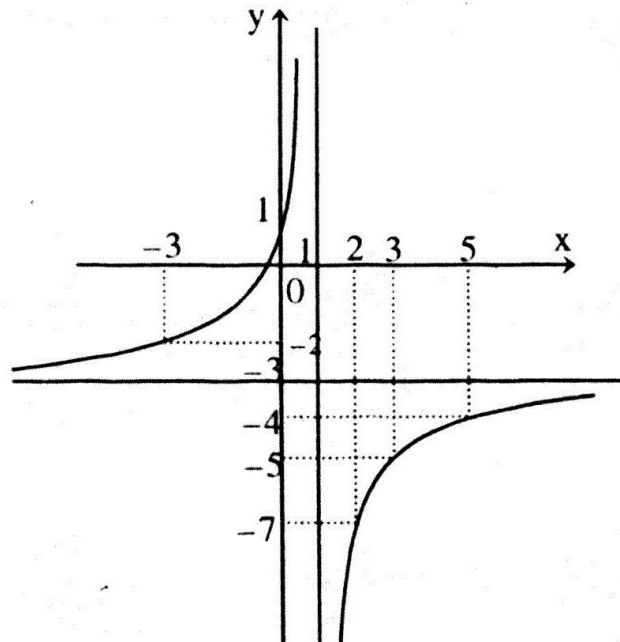
$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

• Đồ thị: hình bên

2. Tính diện tích hình phẳng

Dựa vào đồ thị ta có diện tích cần tìm :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(\frac{-3x-1}{x-1} \right) dx = \int_{-\frac{1}{3}}^0 \left(-3 - \frac{4}{x-1} \right) dx \\
 &= \left(-3x - 4 \ln|x-1| \right) \Big|_{-\frac{1}{3}}^0 = -1 + 4 \ln \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$



3. Tìm m

Đặt (d) : $y = x$

Đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với (d) $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm :

$$\begin{cases} \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1} = x \\ \frac{(m-1)^2}{(x-1)^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-m)^2 = 0 & (1) \\ (m-1)^2 = (x-1)^2 & (2) \end{cases} \quad (x \neq 1)$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = x-1 \\ m-1 = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x \\ m = 2-x \end{cases}$$

- Với $m = 2 - x$:

$$(1) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 : \text{ vô nghiệm với mọi } x \neq 1 \Rightarrow m = 2 - x \text{ không thỏa}$$

- Với $m = x$: (1) luôn luôn đúng với mọi $x \neq 1$

$\Rightarrow m \neq 1$ thỏa yêu cầu bài toán

Vậy giá trị cần tìm là : $m \neq 1$.

Câu II.

1. Giải bất phương trình :

Ta có: $(x^2 - 3x) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \vee x = 2 \\ x < -\frac{1}{2} \vee x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \vee x = 2 \\ x < -\frac{1}{2} \vee x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x \geq 3$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $x \leq -\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x \geq 3$.

2. Giải hệ phương trình

$$\text{Xét : } \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y & (1) \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{2^x(2^x + 2)}{2^x + 2} = y \Leftrightarrow 2^x = y > 0$$

Thế vào (1), ta có : $y^3 = 5y^2 - 4y \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$ (do $y > 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 0 \\ y = 4 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$.

Câu III. Giải phương trình

Ta có: $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x (\cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\forall x \in [0; 14] \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{2} \vee x = \frac{7\pi}{2}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \vee x = \frac{5\pi}{2} \vee x = \frac{7\pi}{2}.$$

Câu IV.

1. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp AD \text{ (do } AD \perp (ABC)) \end{cases} \\ \Rightarrow BC \perp (ADH)$$

$$\text{Mà } BC \subset (BCD) \Rightarrow (ADH) \perp (BCD)$$

theo giao tuyến DH

$$\text{Kẻ } AK \perp DH \text{ (} K \in DH \text{) thì } AK \perp (BCD)$$

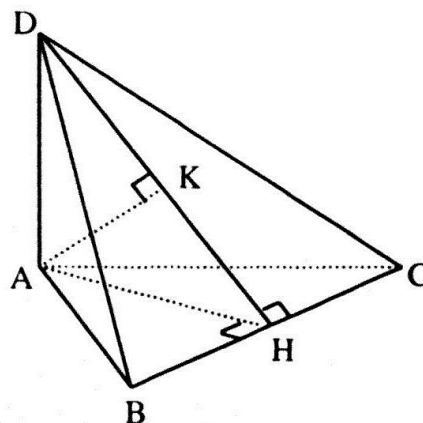
$\Rightarrow AK$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD)

$$\text{Ta có: } AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại A}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} = \frac{25}{144}$$

$$\triangle ADH \text{ vuông tại A, ta có: } \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{16} + \frac{25}{144} = \frac{17}{72}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ (cm)}.$$



Cách khác:

$$\text{Ta có: } AB^2 + AC^2 = 16 + 9 = 25 = BC^2 \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại A} \Rightarrow AB \perp AC$$

Chọn hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz như hình vẽ, ta có:

$$A(0;0;0), B(3;0;0), C(0;4;0), D(0;0;4)$$

$$\text{Phương trình mặt phẳng (BCD) có dạng: } \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y + 3z - 12 = 0$$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) là:

$$d(A, (BCD)) = \frac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}} = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ (cm)}.$$

2. Xác định m

$$(P) \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = (2; -1; 0)$$

$$d_m \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (-2m^2 + m + 1; -4m^2 - 4m - 1; m^2 - m)$$

$$d_m // (P) \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2(-2m^2 + m + 1) + 4m^2 + 4m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Với $m = -\frac{1}{2}$, ta có : $d_m : \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

d_m đi qua điểm $M(0; 1; 0)$. Dễ thấy $M \notin (P) \Rightarrow d_m // (P)$

Vậy giá trị cần tìm là : $m = -\frac{1}{2}$.

Câu V.

1. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$

Xét nhị thức : $(x+2)^n = C_n^0 x^n + 2C_n^1 x^{n-1} + 2^2 C_n^2 x^{n-2} + \dots + 2^n C_n^n$

Cho $x = 1$, ta có : $C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 \dots + 2^n C_n^n = 3^n$

Theo đề bài, ta có : $3^n = 243 = 3^5 \Leftrightarrow n = 5$

Vậy giá trị cần tìm là : $n = 5$.

2. Xác định tọa độ của M, N

Đặt $M(m; 0), N(0; n)$ lần lượt thuộc tia Ox và Oy ($m > 0, n > 0$)

Phương trình đường thẳng MN : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

MN tiếp xúc với $(E) \Leftrightarrow A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} = 1 \quad (1)$$

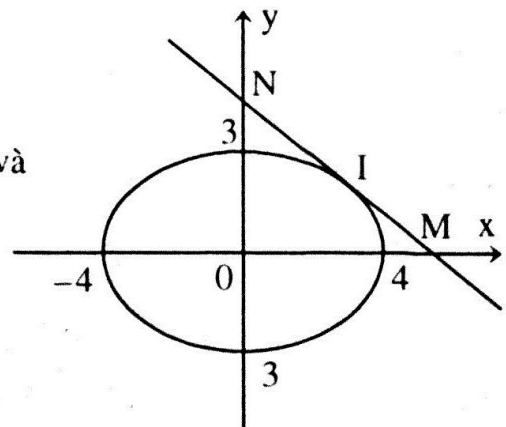
Độ dài đoạn MN : $MN = \sqrt{m^2 + n^2} = \sqrt{(m^2 + n^2) \left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} \right)}$ (do (1))

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có : $MN \geq \left| m \cdot \frac{4}{m} + n \cdot \frac{3}{n} \right| = 7 \Rightarrow \min MN = 7$,

đạt được khi :

$$\begin{cases} \frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} = 1 \\ \frac{m^2}{4} = \frac{n^2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2\sqrt{7} \\ n = \sqrt{21} \end{cases}$$

Vậy $M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21})$ và $\min MN = 7$.



ĐỀ SỐ 4

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, NĂM 2002

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số : $y = x^4 - mx^2 + m - 1$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 8$.
2. Xác định m sao cho đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}(4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$.
2. Xác định m để phương trình : $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2 \sin 2x - m = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu III. (2 điểm)

1. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC) theo a , biết rằng $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
2. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$

Câu IV. (2 điểm)

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcac vuông góc Oxy, cho hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

1. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(C_1), (C_2)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $x + 6y - 6 = 0$.
2. Viết phương trình tiếp tuyến chung của các đường tròn (C_1) và (C_2) .

Câu V. (2 điểm)

1. Giải phương trình : $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x - 12 + 2\sqrt{x^2 - 16}$.
2. Đội học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Hỏi có bao nhiêu cách cử 8 học sinh trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất một em được chọn.

Câu VI.

Gọi x, y, z là khoảng cách từ điểm M thuộc miền trong của tam giác ABC có ba góc nhọn đến các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}$; a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Dấu "=" xảy ra khi nào?

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 8$.

Khi $m = 8$, ta có: $y = x^4 - 8x^2 + 7$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $y' = 4x^3 - 16x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -9 \\ x = 0 \Rightarrow y = 7 \\ x = 2 \Rightarrow y = -9 \end{cases}$$

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$		-9		7		-9		$+\infty$

• Tính lồi lõm và điểm uốn: $y'' = 12x^2 - 16$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{17}{9}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
y''	+	0	-	0	+
Đồ thị	lõm	$I_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{17}{9}\right)$	lồi	$I_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{17}{9}\right)$	lõm

• Điểm đặc biệt: $y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{7} \end{cases}$

• Đồ thị: hình bên

2. Xác định m

Đặt $(C_m): y = x^4 - mx^2 + m - 1$

Phương trình hoành độ giao

điểm của (C_m) và trục Ox:

$$x^4 - mx^2 + m - 1 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2, t \geq 0$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - mt + m - 1 = 0 \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1)

có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

(2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m + 4 > 0 \\ S = m > 0 \\ P = m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Câu II.

1. Giải bất phương trình

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(4^x + 4) \geq \log_{\frac{1}{2}}(2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x)$

$$\Leftrightarrow 4^x + 4 \leq 2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4^x - 3 \cdot 2^x - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \leq -1 \text{ (loại)} \\ 2^x \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2.$$

2. Xác định m để phương trình có nghiệm $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

Ta có: $2(\sin^4 x + \cos^4 x) + \cos 4x + 2 \sin 2x - m = 0$

$$\Leftrightarrow 2(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) + \cos 4x + 2 \sin 2x - m = 0$$

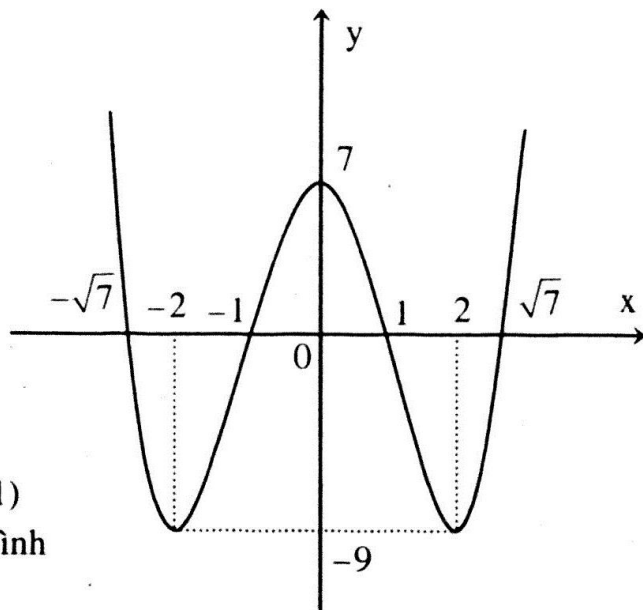
$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right) + 1 - 2 \sin^2 2x + 2 \sin 2x - m = 0$$

$$\Leftrightarrow -3 \sin^2 2x + 2 \sin 2x + 3 - m = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \sin 2x$. Ta có: $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$. (2) $\Leftrightarrow -3t^2 + 2t + 3 = m$.

Xét hàm số: $y = -3t^2 + 2t + 3, t \in [0; 1]$

$$y' = -6t + 2. \quad y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$



Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{3}$	1
y'		+	0
y		$\frac{10}{3}$	

3 → $\frac{10}{3}$ → 2

Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 2 \leq m \leq \frac{10}{3}$.

Câu III.

1. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (SBC)

Gọi H là trung điểm của BC, ta có :

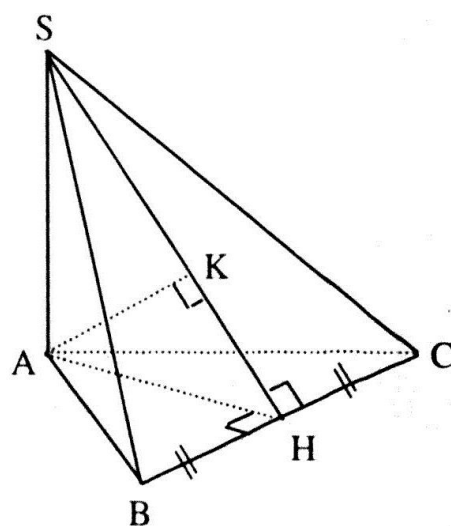
$$\begin{cases} BC \perp AH \text{ (do } \triangle ABC \text{ đều)} \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAH)$$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAH) \perp (SBC)$ theo

giao tuyến SH

Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên SH thì $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)



$\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\triangle SAH$ vuông tại A, ta có :

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AH^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} + \frac{1}{\frac{6a^2}{4}} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

2. Tính tích phân

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } I &= \int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \ln 2). \end{aligned}$$

Câu IV.

1. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của $(C_1), (C_2)$

Tọa độ giao điểm của $(C_1), (C_2)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 10x = 0 \\ 7x - y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \\ y = 7x - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Có hai giao điểm là $A(1; -3)$, $B(2; 4)$

Tọa độ (C) là đường tròn cần tìm và I, R lần lượt là tâm và bán kính của (C)

Ta có: $I \in d: x + 6y - 6 = 0 \Rightarrow I(6 - 6t; t)$

C) qua A, B $\Leftrightarrow IA = IB = R \Rightarrow IA^2 = IB^2$

$$\Leftrightarrow (6t - 5)^2 + (3 + t)^2 = (6t - 4)^2 + (4 - t)^2$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(12; -1), R = 5\sqrt{5}$$

Phương trình đường tròn (C) có dạng: $(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$.

2. **Viết phương trình tiếp tuyến chung của các đường tròn (C_1) và (C_2)**

(C_1) và (C_2) có tâm và bán kính lần lượt là: $I_1(5; 0), R_1 = 5$; $I_2(-2; 1), R_2 = 5$

Ta có: $\overline{I_1 I_2} = (-7; 1) \Rightarrow I_1 I_2 = 5\sqrt{2} \Rightarrow 0 = R_1 - R_2 < I_1 I_2 < R_1 + R_2 = 10$

$\Rightarrow (C_1), (C_2)$ cắt nhau $\Rightarrow$ Có hai tiếp tuyến chung

Tọa độ Δ là tiếp tuyến chung của $(C_1), (C_2)$

Do $R_1 = R_2 = 5$ nên $\Delta // I_1 I_2 \Rightarrow \Delta$ nhận $\overline{I_1 I_2}$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $x + 7y + C = 0$

Δ tiếp xúc với $(C_1), (C_2) \Leftrightarrow d(I_1, \Delta) = R_1$

$$\Leftrightarrow \frac{|5 + C|}{5\sqrt{2}} = 5 \Leftrightarrow |5 + C| = 25\sqrt{2} \Leftrightarrow C = -5 \pm 25\sqrt{2}.$$

Vậy hai tiếp tuyến chung cần tìm là:

$$x + 7y - 5 + 25\sqrt{2} = 0; x + 7y - 5 - 25\sqrt{2} = 0.$$

Câu V:

1. **Giải phương trình**

$$\text{Xét: } \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 2x - 12 + 2\sqrt{x^2 - 16} \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 4$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} \quad (t \geq 0) \Rightarrow t^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - 16}$$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \text{ (loại)} \\ t = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 16} = 8 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8-x \geq 0 \\ x^2 - 16 = (8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq 8 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 5$.

2. Số cách chọn 8 học sinh trong đội đi dự trại hè

Chọn 8 học sinh tùy ý từ 18 em trong đội tuyển : Có C_{18}^8 cách.

Ta xét các trường hợp không thỏa yêu cầu bài toán:

- Chọn 8 học sinh khối 10 và khối 11 : Có C_{11}^8 cách.
- Chọn 8 học sinh khối 10 và khối 12 : Có C_{12}^8 cách.
- Chọn 8 học sinh khối 11 và khối 12 : Có C_{13}^8 cách.

Vậy số cách chọn thỏa yêu cầu bài toán là:

$$C_{18}^8 - (C_{11}^8 + C_{12}^8 + C_{13}^8) = 43758 - 1947 = 41811 \text{ (cách).}$$

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Ta có: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = a \cdot \frac{a}{2R} + b \cdot \frac{b}{2R} + c \cdot \frac{c}{2R}$
 $= a \sin A + b \sin B + c \sin C$

Mặt khác:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} ab \sin C$$

Suy ra: $\sin A = \frac{2S}{bc}$, $\sin B = \frac{2S}{ac}$, $\sin C = \frac{2S}{ab}$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = a \cdot \frac{2S}{bc} + b \cdot \frac{2S}{ac} + c \cdot \frac{2S}{ab} = 2S \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \right)$$

Ngoài ra: $S = S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MAC} + S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}(ax + by + cz) \Leftrightarrow 2S = ax + by + cz$

Do đó: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} = (ax + by + cz) \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \right)$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

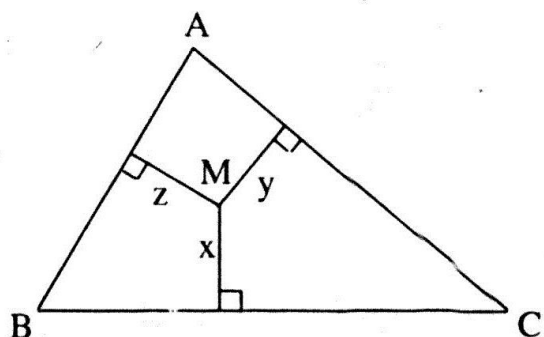
$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{bc} \cdot \frac{b}{ac}} = \frac{2}{c} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} \quad (2)$

$$\frac{c}{ab} + \frac{a}{bc} \geq \frac{2}{b} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$



$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} \geq (ax + by + cz) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \stackrel{B.C.S}{\geq} (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \quad (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases}$.

Cách khác:

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = S_{\Delta MBC} + S_{\Delta MAC} + S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2}(ax + by + cz) \Leftrightarrow 2S = ax + by + cz$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} &= \sqrt{ax} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{by} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + \sqrt{cz} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \sqrt{(ax + by + cz) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} = \\ &= \sqrt{2S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)} = \sqrt{\frac{abc \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)}{2R}} = \sqrt{\frac{ab + bc + ca}{2R}} \end{aligned}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$ab + bc + ca \leq \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)^2} = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}} \quad (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} \\ a\sqrt{x} = b\sqrt{y} = c\sqrt{z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ x = y = z \end{cases}$.

ĐỀ SỐ 5

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, NĂM 2002

Câu I. (Đại học : 2,0 điểm)

1. Tìm số n nguyên dương thỏa mãn bất phương trình : $A_n^3 + 2C_n^{n-2} \leq 9n$, trong đó A_n^k và C_n^k lần lượt là số chỉnh hợp và số tổ hợp chập k của n phần tử.
2. Giải phương trình : $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$

Câu II. (Đại học : 2,5 điểm)

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 - 2x + m}{x - 2}$ (1) (m là tham số).

1. Xác định m để hàm số (1) nghịch biến trên đoạn $[-1; 0]$
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
3. Tìm a để phương trình sau có nghiệm:

$$9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (a+2)3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2a + 1 = 0.$$

Câu III. (Đại học : 1,5 điểm)

1. Giải phương trình : $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} = \frac{1}{2} \cot g 2x - \frac{1}{8 \sin 2x}$.
2. Xét tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$.
Tính diện tích tam giác ABC, biết rằng : $b \sin C (b \cos C + c \cos B) = 20$.

Câu IV. (Đại học : 3,0 điểm)

1. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA; OB và OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là các góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OBC), (OCA) và (OAB). Chứng minh rằng : $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \sqrt{3}$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng (P) : $x - y + z + 3 = 0$ và hai điểm $A(-1; -3; -2), B(-5; 7; 12)$.
 - a) Tìm tọa độ điểm A' là điểm đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).
 - b) Giả sử M là một điểm chạy trên mặt phẳng (P), tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $MA + MB$.

Câu V. (Đại học : 1,0 điểm)

Tính tích phân : $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$.

GIẢI

Câu I.

1. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ n \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } A_n^3 + 2C_n^{n-2} \leq 9n \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)!2!} \leq 9n$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)(n-2) + n(n-1) \leq 9n$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 2n - 8 \leq 0 \Leftrightarrow 3 \leq n \leq 4 \quad (\text{do } n \geq 3)$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là: $n = 3 \vee n = 4$.

2. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \frac{1}{2} \log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_4(x-1)^8 = \log_2(4x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x)$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x+3)|x-1|] = \log_2(4x) \Leftrightarrow (x+3)|x-1| = 4x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-1) = 4x \\ (x+3)(x-1) = -4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 + 6x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \vee x = 3 \\ x = -3 - 2\sqrt{3} \vee x = -3 + 2\sqrt{3} \end{cases}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x = 3 \vee x = -3 + 2\sqrt{3}$.

Câu II.

1. Tìm m

$$y = \frac{x^2 - 2x + m}{x - 2}$$

$$\text{Miền xác định : } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 4 - m}{(x-2)^2}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in [-1; 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - m \leq 0, \forall x \in [-1; 0]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \leq m, \forall x \in [-1; 0]$$

Xét hàm số :

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, x \in [-1; 0]$$

$$f'(x) = 2x - 4 < 0, \forall x \in [-1; 0]$$

Bảng biến thiên

x	-1		0
$f'(x)$		-	
$f(x)$		9	

Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq 9$.

2. Khảo sát hàm số khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có : $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = x + \frac{1}{x - 2}$

• Miền xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$

• Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow 2} y = \infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty \\ y = x + \frac{1}{x - 2} \end{cases} \Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
y'		+	0	-		-	0	+
y								
	$-\infty$	$\nearrow$		0	$\searrow$		$-\infty$	

• Điểm đặc biệt :

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1$$

• Đồ thị : hình bên

3. Tìm a để phương trình có nghiệm

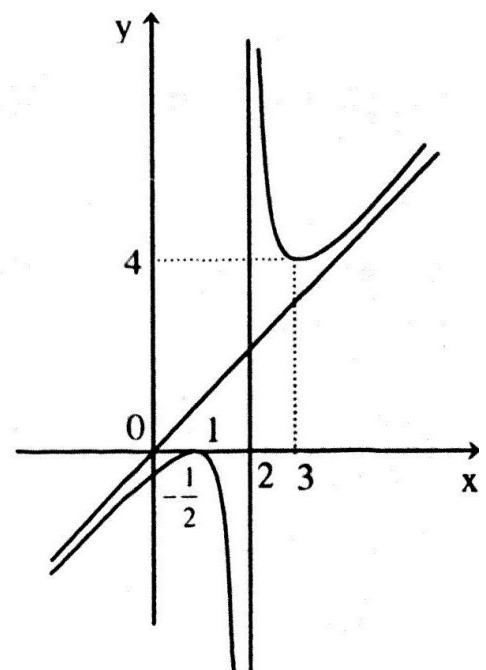
$$\text{Xét : } 9^{1+\sqrt{1-t^2}} - (a+2)3^{1+\sqrt{1-t^2}} + 2a+1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện : } 1-t^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$$

$$\text{Đặt } x = 3^{1+\sqrt{1-t^2}}. \text{ Ta có: } t \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [3; 9]$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - (a+2)x + 2a+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = a(x-2)$$



$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2} = a \quad (\text{do } x \in [3; 9])$$

Ta có : $y(3) = 4, y(9) = \frac{64}{7}$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ Đồ thị (C) và đường thẳng $y = a$ có giao điểm trong đoạn $[3; 9]$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 4 \leq a \leq \frac{64}{7} \dots$

Câu III.

1. Giải phương trình

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq l \frac{\pi}{2} \quad (l \in \mathbb{Z})$

Ta có : $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{5 \sin 2x} = \frac{1}{2} \cot g 2x - \frac{1}{8 \sin 2x} \Leftrightarrow 8(\sin^4 x + \cos^4 x) = 20 \cos 2x - 5$

$$\Leftrightarrow 8(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) = 20 \cos 2x - 5 \Leftrightarrow 8 - 4 \sin^2 2x = 20 \cos 2x - 5$$

$$\Leftrightarrow 8 - 4(1 - \cos^2 2x) = 20 \cos 2x - 5 \Leftrightarrow 4 \cos^2 2x - 20 \cos 2x - 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = \frac{9}{2} \text{ (loại)} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Tính diện tích ΔABC

Theo định lí sin, ta có : $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$

Do đó : $b \sin C (b \cos C + c \cos B) = 20$

$$\Leftrightarrow 2R \sin B \sin C (2R \sin B \cos C + 2R \sin C \cos B) = 20$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 \sin B \sin C (\sin B \cos C + \sin C \cos B) = 20$$

$$\Leftrightarrow 4R^2 \sin B \sin C \sin(B + C) = 20 \Leftrightarrow R^2 \sin A \sin B \sin C = 5$$

$$\Leftrightarrow R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = 5 \Leftrightarrow \frac{abc}{4R} = 10 \Leftrightarrow S = 10.$$

Câu IV.

1. Chứng minh

Chọn hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz như hình vẽ

Giả sử $OA = a, OB = b, OC = c \quad (a, b, c > 0)$

ta có : $O(0; 0; 0), A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c).$

Phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) và (ABC) có vectơ pháp tuyến lần lượt là

$$\vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1), \vec{n} = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$$

Do α, β, γ lần lượt là các góc giữa mặt phẳng (ABC) với các mặt phẳng (OBC), (OCA), (OAB) nên ta có :

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} = \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}; \quad \cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{j}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{\frac{1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{\frac{1}{c}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

$$\text{Suy ra: } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = 1$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có :

$$1 \cdot \cos \alpha + 1 \cdot \cos \beta + 1 \cdot \cos \gamma \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)} = \sqrt{3} \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi : $\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$.

2. a) Tìm tọa độ điểm A'

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; 1)$

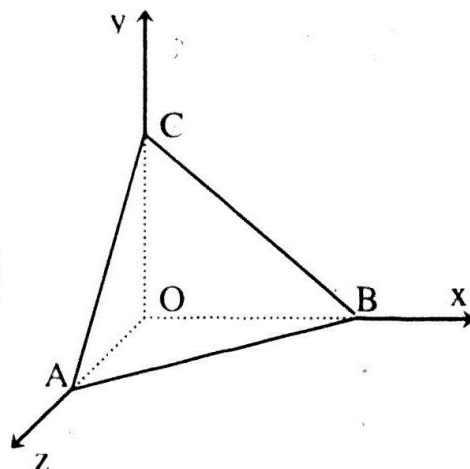
Gọi Δ là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) thì Δ nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng Δ có dạng :

$$\Delta: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -3 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $I = \Delta \cap (P)$ là nghiệm của phương trình :

$$-1 + t + 3 - t - 2 + t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow I(-2; -2; -3)$$



Điểm A' đối xứng với A qua (P) nên I là trung điểm AA':

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_I - x_A = -4 + 1 = -3 \\ y_{A'} = 2y_I - y_A = -4 + 3 = -1 \\ z_{A'} = 2z_I - z_A = -6 + 2 = -4 \end{cases} \Rightarrow A'(-3; -1; -4).$$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất

Đặt $f(x, y, z) = x - y + z + 3$

Ta có: $\begin{cases} f(A) = 3 \\ f(B) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(A) \cdot f(B) > 0$

$\Rightarrow AB$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P)

Giao điểm của A'B với mặt phẳng (P) là điểm M cần tìm

Thật vậy: Xét điểm M_0 thuộc (P), ta có:

$$M_0A + M_0B = M_0A' + M_0B \geq A'B \text{ (cố định)}.$$

Mặt khác: $A'B = MA' + MB = MA + MB$

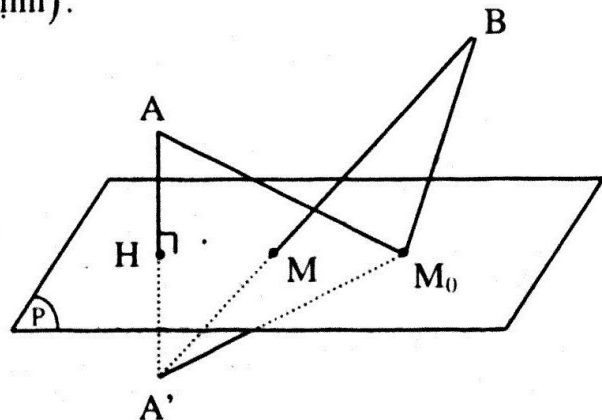
Suy ra: $M_0A + M_0B \geq MA + MB$

Đường thẳng A'B qua điểm A' và nhận

$\vec{A'B} = 2(-1; 4; 8)$ làm vectơ chỉ phương

có phương trình:

$$\begin{cases} x = -3 - t' \\ y = -1 + 4t' \\ z = -4 + 8t' \end{cases}$$



Tham số t' ứng với giao điểm $M = A'B \cap (P)$ là nghiệm phương trình:

$$-3 - t' - 4t' + 1 - 4 + 8t' + 3 = 0 \Leftrightarrow t' = 1 \Rightarrow M(-4; 3; 4)$$

Khi đó: $\min(MA + MB) = A'B = \sqrt{4 + 64 + 256} = 18.$

Câu V. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$$

Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận:

x	0	$\ln 3$
t	2	4

$$I = \int_2^4 \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = \int_2^4 t^{-\frac{3}{2}} dt = -2t^{-\frac{1}{2}} \Big|_2^4 = -\frac{2}{\sqrt{t}} \Big|_2^4$$

$$I = \sqrt{2} - 1.$$

ĐỀ SỐ 6

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 3, NĂM 2002

Câu I. (Đại học: 3,0 điểm; Cao đẳng: 3,5 điểm).

Cho hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$ (1) (m là tham số)

1. Cho $m = \frac{1}{2}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết rằng tiếp tuyến đó song song với đường thẳng d : $y = 4x + 2$.

2. Tìm m thuộc khoảng $\left(0; \frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm

số (1) và các đường $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ có diện tích bằng 4.

Câu II. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 \end{cases}$$

2. Giải phương trình : $\operatorname{tg}^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x) \sin 3x}{\cos^4 x}$.

Câu III. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 3,0 điểm).

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcac vuông góc Oxyz cho đường thẳng

$$\Delta: \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{và mặt phẳng (P): } 4x - 2y + z - 1 = 0.$$

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng Δ trên mặt phẳng (P).

Câu IV. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 1,0 điểm).

1. Tìm giới hạn : $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x}$.

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcac vuông góc Oxy cho hai đường tròn :

$$(C_1): x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0 \quad \text{và} \quad (C_2): x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0.$$

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2) .

Câu V. (1,0 điểm).

Giả sử x, y là hai số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y = \frac{5}{4}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y}$.

Chú ý: Thí sinh chỉ thi Cao đẳng không làm Câu IV.2) và Câu V.

GIẢI

Câu I.

1. a) Khảo sát hàm số khi $m = \frac{1}{2}$

Khi $m = \frac{1}{2}$, ta có: $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3}$

• Miền xác định : $D = \mathbb{R}$

• $y' = x^2 + x - 2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = 2 \\ x = 1 \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

• Giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$

• Tính lồi lõm và điểm uốn:

$$y'' = 2x + 1$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		-	0	+	
Đồ thị		lõm	Đ.U $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$	lồi	

• Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$

$$x = -\frac{7}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$$

$$x = \frac{5}{2} \Rightarrow y = 2$$

- Đồ thị : hình bên

b) Viết phương trình tiếp tuyến

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm

$\Delta // d$ nên có phương trình:

$$y = 4x + b \quad (b \neq 2)$$

Δ tiếp xúc với (C)

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3} = 4x + b & (1) \\ x^2 + x - 2 = 4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{4}{3} = 4x + b & (1) \\ x^2 + x - 2 = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow b = -\frac{26}{3} \\ x = -3 \Rightarrow b = \frac{73}{6} \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm : $\Delta_1 : y = 4x - \frac{26}{3}$; $\Delta_2 : y = 4x + \frac{73}{6}$.

2. Tìm m

Ta có: $y' = x^2 + 2mx - 2$

$$y'' = 2x + 2m$$

Nhận xét: $y'' > 0, \forall x \in [0; 2]$ và $m \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số lõm $\forall x \in [0; 2]$

$$\text{Mặt khác : } \begin{cases} y(2) = -\frac{5}{3} + 2m < 0, \forall m \in \left(0; \frac{5}{6}\right) \\ y(0) = -2m - \frac{1}{3} < 0, \forall m \in \left(0; \frac{5}{6}\right) \end{cases}$$

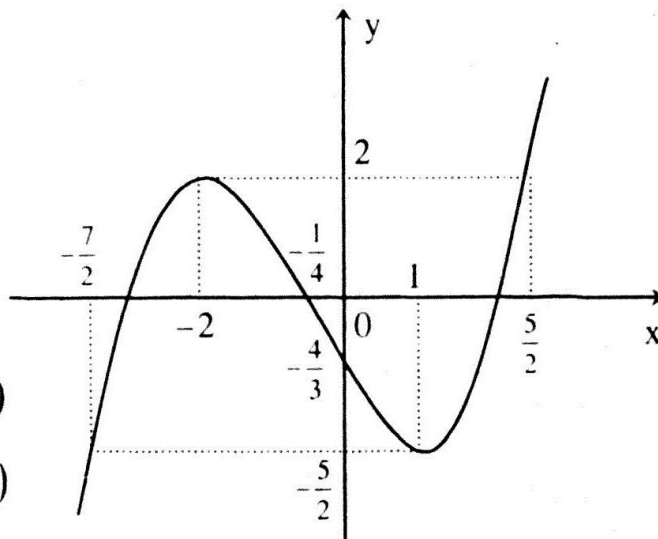
$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số luôn luôn nằm dưới trục Ox, $\forall x \in [0; 2]$ và $m \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_0^2 \left(-\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 2x + 2m + \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \left(-\frac{x^4}{12} - \frac{m}{3}x^3 + x^2 + 2mx + \frac{1}{3}x \right) \Big|_0^2$$

$$S = \frac{4m}{3} + \frac{10}{3}$$



$$\text{Ta có : } S = 4 \Leftrightarrow \frac{4m}{3} + \frac{10}{3} = 4 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$$

Vậy giá trị cần tìm là : $m = \frac{1}{2}$.

Câu II.

1. Giải hệ phương trình

$$\text{Xét : } \begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 & (1) \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\log_4 x} = \sqrt{\log_2 y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 y \geq 0 \\ \log_4 x = \log_2 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ \log_4 x = \log_4 y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x = y^2 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó : } (1) \Leftrightarrow y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = 3 \Rightarrow x = 9 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 9 \\ y = 3 \end{cases}$.

2. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện : } \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có : } \operatorname{tg}^4 x + 1 = \frac{(2 - \sin^2 2x) \sin 3x}{\cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = (2 - \sin^2 2x) \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = (2 - \sin^2 2x) \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = (2 - \sin^2 2x) \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (2 - \sin^2 2x) = (2 - \sin^2 2x) \sin 3x$$

$$\Leftrightarrow (2 - \sin^2 2x) \left(\sin 3x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 2x = 2 \text{ (loại)} \\ \sin 3x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là :

$$x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu III.

1. Tính khoảng cách từ S đến đường thẳng BE

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc Oxyz như hình vẽ, ta có:

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), C(a; a; 0),$$

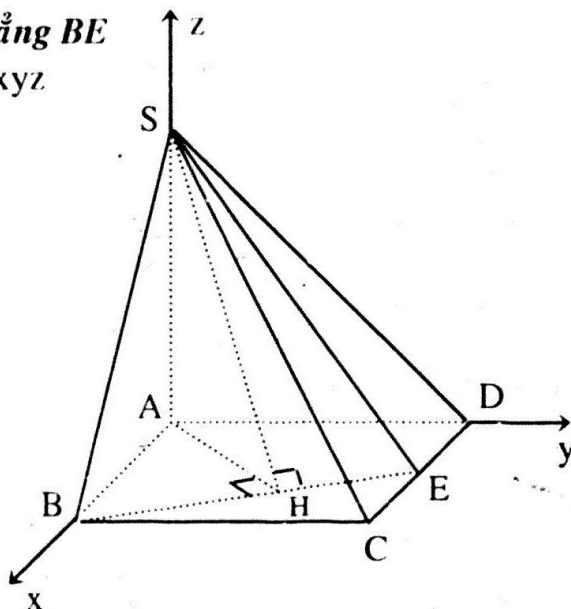
$$D(0; a; 0), S(0; 0; a) \quad (a > 0)$$

$$E \text{ là trung điểm } CD \Rightarrow E\left(\frac{a}{2}; a; 0\right)$$

Ta có:

$$\overrightarrow{BE} = \left(-\frac{a}{2}; a; 0\right), \quad \overrightarrow{BS} = (-a; 0; a)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}] = \left(a^2; \frac{a^2}{2}; a^2\right)$$



Khoảng cách từ S đến đường thẳng BE :

$$d(S, BE) = \frac{|\overrightarrow{BS} \cdot [\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}]|}{|\overrightarrow{BE}| \cdot |[\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}]|} = \frac{\sqrt{a^4 + \frac{a^2}{4} + a^2}}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

Cách khác

$$\text{Kẻ } AH \perp BE, \text{ ta có: } \begin{cases} BE \perp AH \\ BE \perp SA \end{cases} \Rightarrow BE \perp (SAH) \Rightarrow BE \perp SH$$

$\Rightarrow SH$ là khoảng cách từ S đến BE

$$\text{Diện tích } \triangle ABE \text{ là: } S = \frac{1}{2} AB \cdot EF = \frac{1}{2} a^2 \quad (EF = BC = a : \text{chiều cao})$$

$$\text{Mặt khác: } S = \frac{1}{2} BE \cdot AH, \text{ với } BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{2S}{BE} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

$$\triangle SAH \text{ vuông tại A, cho: } SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$$

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (4; -2; 1)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (P) thì phương trình mặt phẳng

$$(Q) \text{ có dạng: } m(2x + y + z + 1) + n(x + y + z + 2) = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (2m + n)x + (m + n)y + (m + n)z + m + 2n = 0$$

Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (2m + n; m + n; m + n)$

$$(Q) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 4(2m + n) - 2(m + n) + m + n = 0$$

$$\Leftrightarrow 7m + 3n = 0: \text{ chọn } m = -3, n = 7 \Rightarrow (Q): x + 4y + 4z + 11 = 0$$

Gọi Δ' là hình chiếu vuông góc của Δ trên (P) thì $\Delta' = (P) \cap (Q)$

Phương trình đường thẳng Δ' có dạng :

$$\Delta': \begin{cases} 4x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + 4y + 4z + 11 = 0 \end{cases}$$

Câu IV.

1. Tìm giới hạn

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} + \frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} + \frac{x}{x(\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} + 1)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2} - \sqrt[3]{x-1} + 1} \right)$$

$$L = \frac{5}{6}.$$

2. Viết phương trình tiếp tuyến chung

(C_1) có tâm $I_1(0; 2)$ và bán kính $R_1 = 3$

(C_2) có tâm $I_2(3; -4)$ và bán kính $R_2 = 3$

Ta có: $\overline{I_1 I_2} = (3; -6)$

$$\Rightarrow I_1 I_2 = 3\sqrt{5} > R_1 + R_2$$

$\Rightarrow (C_1)$ và (C_2) ngoài nhau

$\Rightarrow (C_1)$ và (C_2) có 4 tiếp tuyến chung.

• Hai tiếp tuyến chung ngoài:

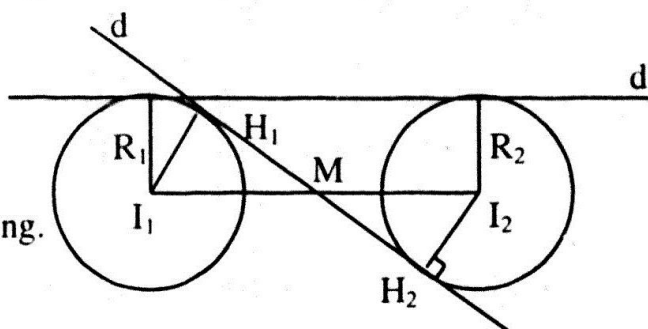
Gọi Δ là tiếp tuyến chung ngoài

Do $R_1 = R_2 = 3$ nên $\Delta \parallel I_1 I_2 \Rightarrow \Delta$ nhận $\overline{I_2 I_2} = 3(1; -2)$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình đường thẳng Δ có dạng : $2x + y + C = 0$

(d) tiếp xúc với $(C_1), (C_2) \Leftrightarrow d(I_1, \Delta) = R_1$

$$\Leftrightarrow \frac{|2+C|}{\sqrt{5}} = 3 \Leftrightarrow |2+C| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -2 + 3\sqrt{5} \\ C = -2 - 3\sqrt{5} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \Delta_1: 2x + y - 2 + 3\sqrt{5} = 0; \Delta_2: 2x + y - 2 - 3\sqrt{5} = 0.$$

• Hai tiếp tuyến chung trong :

Gọi d là tiếp tuyến chung trong và $M = d \cap I_1 I_2$

Ta có : $\Delta I_1 M H_1 = \Delta I_2 M H_2$ (H_1, H_2 là các tiếp điểm)

$$\Rightarrow M \text{ là trung điểm } I_1 I_2 \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -1\right)$$

Phương trình đường thẳng d qua M có dạng :

$$A\left(x - \frac{3}{2}\right) + B(y + 1) = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \Leftrightarrow Ax + By - \frac{3}{2}A + B = 0$$

$$\text{Ta có : } d(I, d) = R_1 \Leftrightarrow \frac{\left|2B - \frac{3}{2}A + B\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |2B - A| = 2\sqrt{A^2 + B^2} \Leftrightarrow (2B - A)^2 = 4(A^2 + B^2)$$

$$\Leftrightarrow A(3A + 4B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 : \text{chọn } B = 1 \\ B = -\frac{3}{4}A : \text{chọn } A = 4, B = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d_1: 4x - 3y - 9 = 0; d_2: y + 1 = 0.$$

$$\text{Vậy có 4 tiếp tuyến chung là: } \begin{array}{ll} 2x + y - 2 + 3\sqrt{5} = 0; & 2x + y - 2 - 3\sqrt{5} = 0 \\ 4x - 3y - 9 = 0; & y + 1 = 0. \end{array}$$

Câu V. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức S

Cách 1

Ta có:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{4} \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5}{4} - x \\ 0 < x < \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } S = \frac{4}{x} + \frac{1}{5 - 4x}, \quad x \in \left(0; \frac{5}{4}\right)$$

$$S' = -\frac{4}{x^2} + \frac{4}{(5 - 4x)^2} = \frac{-20(3x^2 - 8x + 5)}{x^2(5 - 4x)^2}$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in \left(0; \frac{5}{4}\right) \\ x = \frac{5}{3} \notin \left(0; \frac{5}{4}\right) \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$\frac{5}{4}$
S'		- 0 +	
S	$+\infty$	5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy :

$$\min S = 5, \text{ khi } x = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4}.$$

Cách 2

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$S = \frac{4}{x} + \frac{1}{4y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4y} \geq 5 \sqrt[5]{\frac{1}{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 4y}}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt[5]{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 4y} \leq \frac{x + x + x + x + 4y}{5} = \frac{4(x + y)}{5} = 1 \quad \left(\text{do } x + y = \frac{5}{4} \right)$$

$$\Rightarrow S \geq 5$$

$\Rightarrow \min S = 5$, đạt được khi:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{4}; x, y > 0 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Cách 3

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có :

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{5}(x + y) \left(\frac{4}{x} + \frac{1}{4y} \right) \geq \frac{4}{5} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \right)^2 \\ &= \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{4} = 5 \quad \left(\text{do } x + y = \frac{5}{4} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \min S = 5$, đạt được khi:

$$\begin{cases} x + y = \frac{5}{4}; x, y > 0 \\ \frac{x}{2} = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 7

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 4, NĂM 2002

Câu I. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,5 điểm).

1. Giải bất phương trình : $\sqrt{x+12} \geq \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1}$.
2. Giải phương trình : $\operatorname{tg} x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$.

Câu II. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,5 điểm).

Cho hàm số : $y = (x - m)^3 - 3x$ (m là tham số)

1. Xác định m để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ $x = 0$.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho khi $m = 1$.
3. Tìm k để hệ bất phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} |x-1|^3 - 3x - k < 0 \\ \frac{1}{2} \log_2 x^2 + \frac{1}{3} \log_2 (x-1)^3 \leq 1 \end{cases}$$

Câu III. (Đại học: 3,0 điểm; Cao đẳng: 3,0 điểm).

1. Cho tam giác vuông cân ABC có cạnh huyền $BC = a$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại điểm A lấy điểm S sao cho góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) bằng 60° . Tính độ dài đoạn thẳng SA theo a .
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1 : \begin{cases} x - az - a = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} ax + 3y - 3 = 0 \\ x + 3z - 6 = 0 \end{cases}$
 - a) Tìm a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau.
 - b) Với $a = 2$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_2 và song song d_1 . Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2 khi $a = 2$.

Câu IV. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,0 điểm).

1. Giả sử n là số nguyên dương và $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots + a_nx^n$. Biết rằng tồn tại số k nguyên ($1 \leq k \leq n-1$) sao cho $\frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24}$, hãy tính n .
2. Tính tích phân : $I = \int_1^0 x (e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx$

Câu V. (Đại học: 1,0 điểm).

Gọi A, B, C là 3 góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng để tam giác ABC đều thì điều kiện cần và đủ là :

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} - 2 = \frac{1}{4} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}.$$

Ghi chú: Thí sinh chỉ thi Cao đẳng không làm Câu III 2. a) và Câu V.

GIẢI

1. Giải bất phương trình

Điều kiện : $x \geq 3$

Ta có: $\sqrt{x+12} \geq \sqrt{x-3} + \sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow x+12 \geq x-3+2x+1+2\sqrt{(x-3)(2x+1)} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)(2x+1)} \leq 7-x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x \geq 0 \\ (x-3)(2x+1) \leq (7-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ x^2+9x-52 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ -13 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -13 \leq x \leq 4$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là : $3 \leq x \leq 4$.

2. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \pi + l2\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có: } \operatorname{tg} x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \left(1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \left(\frac{\cos \frac{x}{2} \cos x + \sin \frac{x}{2} \sin x}{\cos \frac{x}{2} \cos x} \right)$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \cos x - \cos^2 x = \sin x \frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \cos x}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x + \cos x - \cos^2 x = \operatorname{tg} x \Leftrightarrow \cos x (\cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \text{ (loại)} \\ \cos x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x = m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$.

Câu II.

1. Tìm m

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$$

$$y'' = 6x - 6m$$

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm có hoành độ $x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m^2 - 1) = 0 \\ -6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = -1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Vậy giá trị cần tìm là : $m = -1$.

2. Khảo sát hàm số khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có: $y = x^3 - 3x^2 - 1$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -5 \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y			-1		-5		

$-\infty \rightarrow -1 \rightarrow -5 \rightarrow +\infty$

- Tính lồi lõm và điểm uốn:

$$y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3$$

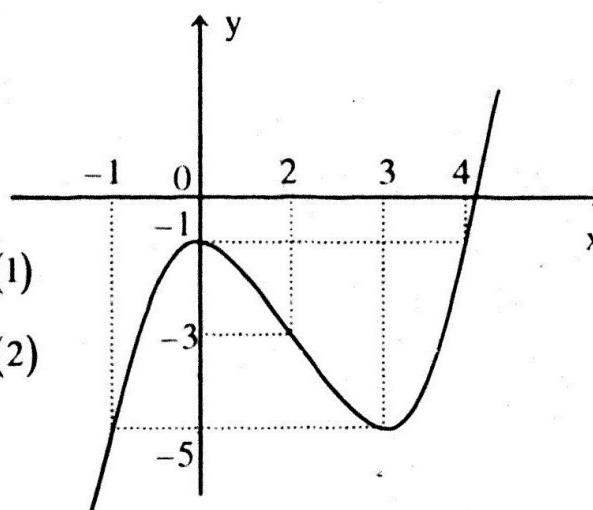
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		-	0	+	
Đồ thị		lồi	Điểm uốn $I(1; -3)$	lõm	

- Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = -5; x = 3 \Rightarrow y = -1$$

- Đồ thị:



3. Tìm k

$$\text{Xét: } \begin{cases} |x-1|^3 - 3x - k < 0 & (1) \\ \frac{1}{2} \log_2 x^2 + \frac{1}{3} \log_2 (x-1)^3 \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x > 1$

$$(2) \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 (x-1) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [x(x-1)] \leq 1 \Leftrightarrow x(x-1) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow 1 < x \leq 2 \quad (\text{do } x > 1)$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow (x-1)^3 - 3x < k \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 - 1 < k$$

Hệ bất phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm thuộc $(1; 2]$

Dựa vào đồ thị, ta có giá trị cần tìm là: $k > -5$.

Câu III.

1. Tính độ dài đoạn SA

Gọi M là trung điểm của BC, ta có :

$$\begin{cases} AM \perp BC \text{ (do } \triangle ABC \text{ vuông cân tại A)} \\ AM \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases}$$

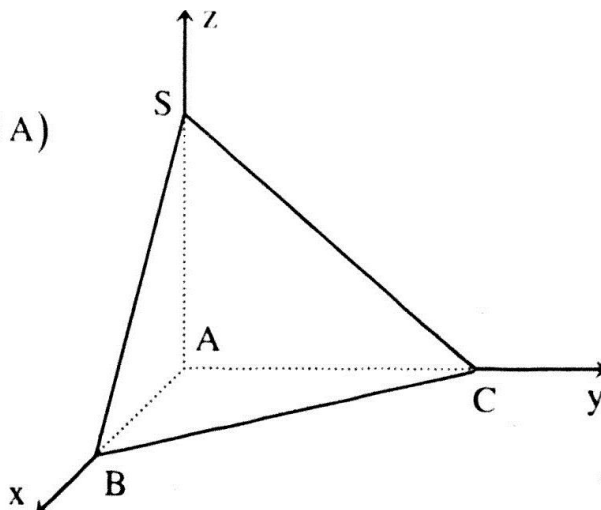
$$\Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$$

$$\Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ$$

$$\text{Ta có : } AM = \frac{1}{2} BC = \frac{a}{2}$$

$\triangle SAM$ vuông tại A, ta có :

$$SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



Cách khác

$\triangle ABC$ vuông cân tại A, có $BC = a$ nên $AB = AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có :

$$A(0;0;0), B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

Đặt $S(0;0;b) \in Oz$ ($b > 0$)

Phương trình mặt phẳng (SBC) có dạng:

$$\frac{x}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{b} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}bx + \sqrt{2}by + az - ab = 0$$

Mặt phẳng (SBC) và (ABC) có vectơ pháp tuyến lần lượt là:

$$\vec{n} = (\sqrt{2}b; \sqrt{2}b; a), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

Góc giữa (SBC) và (ABC) bằng 60° nên ta có :

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{4b^2 + a^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 = 4b^2 + a^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow b = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S\left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{Vậy: } SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

2. a) Tìm a để hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau

d_1 đi qua điểm $A(a; -1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a; 1; 1)$

d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (3; -a; -1)$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-a; 2; 2)$

$$[\vec{a}; \vec{b}] = (a-1; a+3; -a^2-3)$$

$$\Rightarrow [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} = -3a^2 + 3a$$

d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow d_1$ và d_2 đồng phẳng và không song song

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ không cùng phương} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ [\vec{a}; \vec{b}] \neq \vec{0} \end{cases}$$

$$\bullet \quad [\vec{a}; \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \quad [\vec{a}; \vec{b}] \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a-1 \neq 0 \\ a+3 \neq 0 \\ -a^2-3 \neq 0, \forall a \end{cases} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$$

Vậy giá trị cần tìm là : $a = 0 \vee a = 1$.

Cách khác

Phương trình tham số của d_1 và d_2 lần lượt là :

$$d_1 : \begin{cases} x = a + at_1 \\ y = -1 + t_1 \\ z = t_1 \end{cases}, \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t_2 \\ y = 1 - at_2 \\ z = 2 - t_2 \end{cases}$$

d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ Hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} a + at_1 = 3t_2 & (1) \\ -1 + t_1 = 1 - at_2 & (2) \\ t_1 = 2 - t_2 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } t_1 = \frac{6-a^2}{a^2+3}, \quad t_2 = \frac{3a}{a^2+3}$$

$$\text{Thế } t_1, t_2 \text{ vào (3), ta được: } \frac{6-a^2}{a^2+3} + \frac{3a}{a^2+3} = 2 \Leftrightarrow a^2 - a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}.$$

b) Khi $a = 2$, ta có: $[\vec{a}; \vec{b}] = (1; 5; -7)$

• **Viết phương trình mặt phẳng (P)**

(P) chứa (d_2) và song song với (d_1) nên (P) qua B và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương $\Rightarrow (P)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}; \vec{b}] = (1; 5; -7)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$1.(x-0) + 5(y-1) - 7(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 5y - 7z + 9 = 0.$$

- **Tính khoảng cách giữa d_1 và d_2 khi $a = 2$**

Khoảng cách giữa d_1 và d_2 là:

$$d(d_1, d_2) = d(A, (P)) = \frac{|2 - 5 - 7 \cdot 0 + 9|}{\sqrt{1 + 25 + 49}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Câu IV.

1. Tính n

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^k x^k + \dots + C_n^n x^n \\ = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k + \dots + a_n x^n$$

$$\text{Ta có: } a_{k-1} = C_n^{k-1}, \quad a_k = C_n^k, \quad a_{k+1} = C_n^{k+1}$$

$$\text{Do đó: } \frac{a_{k-1}}{2} = \frac{a_k}{9} = \frac{a_{k+1}}{24} \Leftrightarrow \frac{C_n^{k-1}}{2} = \frac{C_n^k}{9} = \frac{C_n^{k+1}}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{9 \cdot k!(n-k)!} = \frac{n!}{24 \cdot (k+1)!(n-k-1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2(n-k)(n-k+1)} = \frac{1}{9 \cdot k(n-k)} = \frac{1}{24 \cdot (k+1)k}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2(n-k+1)} = \frac{1}{9k} \\ \frac{1}{3(n-k)} = \frac{1}{8(k+1)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11k - 2n = 2 \\ 11k - 3n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ n = 10 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là : $n = 10$.

2. Tính tích phân

Ta có:

$$I = \int_1^0 x(e^{2x} + \sqrt[3]{x+1}) dx = \int_1^0 x e^{2x} dx + \int_1^0 x \sqrt[3]{x+1} dx = I_1 + I_2$$

$$\text{Tính } I_1 = \int_1^0 x e^{2x} dx. \text{ Đặt: } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} x e^{2x} \Big|_{-1}^0 - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^{2x} dx = \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Tính } I_2 = \int_1^0 x \sqrt[3]{x+1} dx. \text{ Đặt } t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow x = t^3 - 1 \Rightarrow dx = 3t^2 dt$$

Đổi cận :

x	-1	0
t	0	1

$$I_2 = \int_0^1 3t^3(t^3 - 1)dt = 3 \int_0^1 (t^6 - t^3)dt = 3 \cdot \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$I_2 = -\frac{9}{28} \Rightarrow I = \frac{3}{4e^2} - \frac{1}{4} - \frac{9}{28} = \frac{3}{4e^2} - \frac{4}{7}$$

Câu V. Nhận dạng tam giác

Xét: $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} - 2 = \frac{1}{4} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \quad (1)$

Ta có : $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} - 2$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos A) + \frac{1}{2}(1 + \cos B) + \cos^2 \frac{C}{2} - 2$$

$$= \frac{1}{2}(\cos A + \cos B) + \cos^2 \frac{C}{2} - 1$$

$$= \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2}$$

$$= \sin \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right) = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{4} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C = \cos \frac{A-B}{2} \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \sin \frac{C+A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin A \sin B \sin C = \frac{1}{8} (\sin A + \sin B)(\sin C + \sin A)(\sin B + \sin C)$$

$$\Leftrightarrow 8 \sin A \sin B \sin C = (\sin A + \sin B)(\sin C + \sin A)(\sin B + \sin C)$$

Theo BĐT Cauchy ta có :

$$\bullet \sin A + \sin B \geq 2\sqrt{\sin A \sin B} \quad (1)$$

$$\bullet \sin B + \sin C \geq 2\sqrt{\sin B \sin C} \quad (2)$$

$$\bullet \sin C + \sin A \geq 2\sqrt{\sin C \sin A} \quad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có :

$$8 \sin A \sin B \sin C \leq (\sin A + \sin B)(\sin B + \sin C)(\sin C + \sin A)$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\sin A = \sin B = \sin C \Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều (đpcm).

ĐỀ SỐ 8

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 5, NĂM 2002

Câu I. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 3,0 điểm).

Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + mx}{1 - x}$. (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại và cực tiểu. Với giá trị nào của m thì khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) bằng 10?

Câu II. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,0 điểm).

1. Giải phương trình: $16 \log_{27x^3} x - 3 \log_{3x} x^2 = 0$.
2. Cho phương trình: $\frac{2 \sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2 \cos x + 3} = a$ (2) (a là tham số)
 - a) Giải phương trình (2) khi $a = \frac{1}{3}$.
 - b) Tìm a để phương trình (2) có nghiệm.

Câu III. (Đại học: 3,0 điểm; Cao đẳng: 3,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho đường thẳng $d: x - y + 1 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng (d) mà qua đó ta kẻ được hai đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (C) tại A và B sao cho góc AMB bằng 60° .
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz, cho đường thẳng: $d: \begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$ và mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại 2 điểm M, N sao cho khoảng cách giữa hai điểm đó bằng 9.
3. Tính thể tích khối tứ diện ABCD, biết $AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ và các góc BAC, CAD, DAB đều bằng 60° .

Câu IV. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,0 điểm).

1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cdot \sin x \cos^5 x dx$
2. Tìm giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x}$

Câu V. (Đại học: 1,0 điểm).

Giả sử a, b, c, d là 4 số nguyên thay đổi thỏa mãn $1 \leq a < b < c < d \leq 50$.

Chứng minh bất đẳng thức: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{b^2 + b + 50}{50b}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức: $S = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Ghi chú: Thí sinh chỉ thi Cao đẳng không làm Câu III.2) và Câu V.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số khi $m = 0$

Khi $m = 0$, ta có: $y = \frac{x^2}{1-x} = -x - 1 - \frac{1}{x-1}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$

- Giới hạn và tiệm cận:

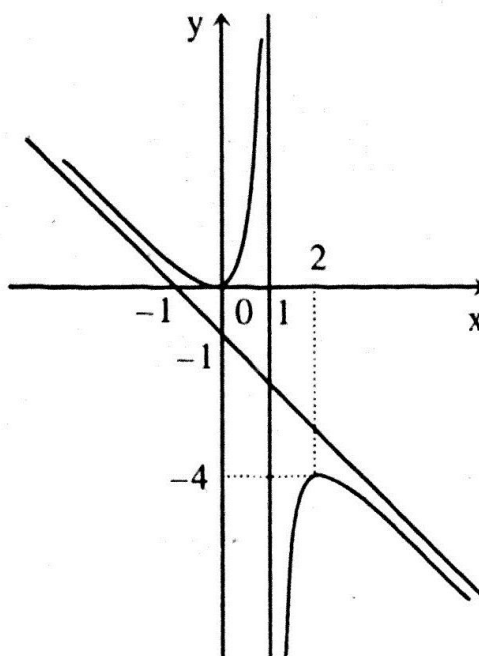
$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow y = -x - 1$ là tiệm cận xiên

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$+$	0
y	$+\infty$	0	$+\infty$	-4	$-\infty$

- Điểm đặc biệt: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- Đồ thị:



2. Tìm m

$$y = -x - m - 1 + \frac{m+1}{1-x}$$

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + m}{(x-1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = -x^2 + 2x + m = 0 \quad (1) \quad (x \neq 1)$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 và y' đổi dấu khi x qua hai nghiệm đó.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g = 1 + m > 0 \\ g(1) = m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 \quad (*)$$

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì x_1, x_2 là nghiệm của (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{1+m} \Rightarrow y_1 = -2 - m + 2\sqrt{1+m} \\ x_2 = 1 + \sqrt{1+m} \Rightarrow y_2 = -2 - m - 2\sqrt{1+m} \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow AB = 10$

$$\Leftrightarrow AB^2 = 100 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow 4(1+m) + 16(1+m) = 100 \Leftrightarrow m = 4 \quad (\text{thỏa}(*))$$

Vậy giá trị cần tìm là : $m = 4$.

Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x > 0 \\ 0 < 27x^3 \neq 1 \\ 0 < 3x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 16 \log_{27x^3} x - 3 \log_{3x} x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{3} \log_{3x} x - 6 \log_{3x} x = 0 \Leftrightarrow \log_{3x} x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x = 1$.

2. a) Giải phương trình khi $a = \frac{1}{3}$

Ta có: $\sin x - 2\cos x + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{Do đó: } \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = a$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x + \cos x + 1 = a(\sin x - 2\cos x + 3)$$

$$\Leftrightarrow (2-a)\sin x + (2a+1)\cos x = 3a-1 \quad (1)$$

Khi $a = \frac{1}{3}$:

$$(1) \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Tìm a để phương trình có nghiệm

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow (2-a)^2 + (1+2a)^2 \geq (3a-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq a \leq 2$$

Vậy giá trị cần tìm là: $-\frac{1}{2} \leq a \leq 2$.

Câu III.

1. Tìm tọa độ điểm M

(C) có tâm $I(-1; 2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$

Đặt $M(t; t+1) \in (d)$

Ta có: $\widehat{AMI} = \frac{1}{2} \widehat{AMB} = 30^\circ$

ΔAMI vuông tại A cho: $IM = \frac{AI}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow IM^2 = 20 \Leftrightarrow (t+1)^2 + (t-1)^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3$$

Vậy có 2 điểm cần tìm: $M_1(-3; 2), M_2(3; 4)$.

2. Tìm m

(S) có tâm $I(-2; 3; 0)$ và bán kính $R = \sqrt{13-m}$ ($m < 13$)

d qua điểm $A(0; 1; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = 3(2; 1; 2)$

Ta có: $\overrightarrow{AI} = (2; -2; -1); [\overrightarrow{AI}, \vec{a}] = (-3; -6; 6)$

Khoảng cách từ I đến d là:

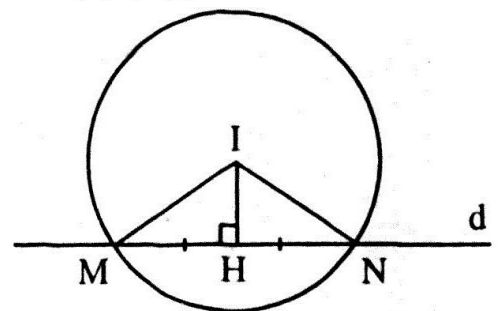
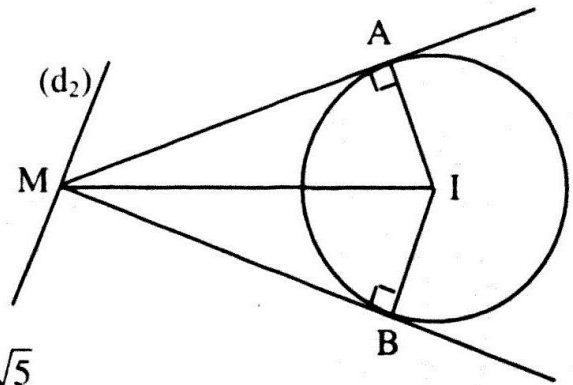
$$IH = d(I, d) = \frac{[\overrightarrow{AI}, \vec{a}]}{|\vec{a}|} = \frac{\sqrt{9+36+36}}{\sqrt{4+1+4}} = 3$$

ΔIMH vuông tại H cho:

$$IM^2 = IH^2 + MH^2 = 9 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{117}{4} \Leftrightarrow 13 - m = \frac{117}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{65}{4}.$$

3. Tính thể tích tứ diện

Giả sử $a = \min\{a, b, c\}$. Trên AC, AD lần lượt lấy điểm C', D' sao cho $AC' = AD' = AB = a \Rightarrow ABC'D'$ là tứ diện đều cạnh a



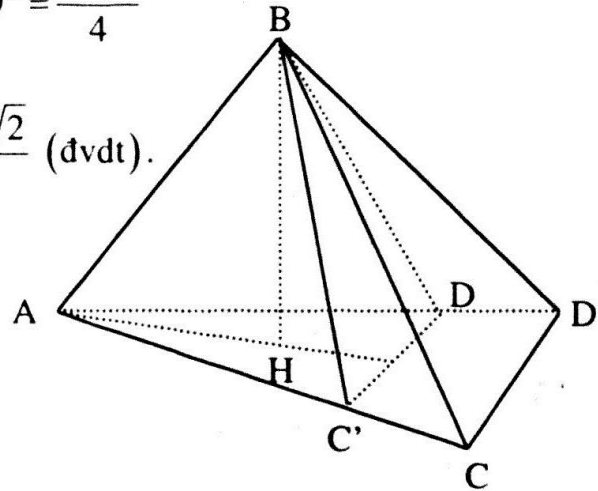
Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (ACD) thì H là tâm của đáy AC'D'. ΔBHA vuông tại H cho :

$$BH = \sqrt{BA^2 - AH^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Diện tích ΔACD là : $S = \frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{bc\sqrt{3}}{4}$

Thể tích tứ diện ABCD là :

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ACD} \cdot BH = \frac{1}{3} \cdot \frac{bc\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{abc\sqrt{2}}{12} \text{ (đvdt)}.$$



Câu IV.

1. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \cdot \cos^3 x \sin x \cos^2 x dx$$

Đặt $t = \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \Rightarrow \cos^3 x = 1 - t^6$

$$\Rightarrow 3 \sin x \cos^2 x dx = 6t^5 dt \Rightarrow \sin x \cos^2 x dx = 2t^5 dt$$

Đổi cận :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	0	1

$$I = 2 \int_0^1 t(1 - t^6) \cdot t^5 dt = 2 \int_0^1 (t^6 - t^{12}) dt = 2 \left(\frac{1}{7} t^7 - \frac{1}{13} t^{13} \right) \Big|_0^1 = \frac{12}{91}.$$

2. Tìm giới hạn

Ta có: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{3x^2 - 1} + 1}{1 - \cos x} + \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - 1}{1 - \cos x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{3x^2}{(1 - \cos x) \left(\sqrt[3]{(3x^2 - 1)^2} - \sqrt[3]{3x^2 - 1} + 1 \right)} + \frac{2x^2}{(1 - \cos x) (\sqrt{2x^2 + 1} + 1)} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{6}{\sqrt[3]{(3x^2 - 1)^2} - \sqrt[3]{3x^2 - 1} + 1} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2x^2 + 1} + 1} \right] = 4.$$

Câu V.

• **Chứng minh bất đẳng thức**

$$\text{Ta có : } \begin{cases} 1 \leq a < b < c < d \leq 50 \\ a, b, c, d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ c \geq b+1 \\ d \leq 50 \end{cases}$$

$$\text{Do đó : } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq \frac{1}{b} + \frac{b+1}{50} = \frac{b^2 + b + 50}{50b} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = 1, c = b + 1, d = 50$.

• **Tìm giá trị nhỏ nhất**

$$\text{Do } 1 \leq a < b < c < d \leq 50 \Rightarrow \begin{cases} b > a \geq 1 \\ b < c < d \leq 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \geq 2 \\ b \leq 48 \end{cases}$$

Trước hết ta tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$f(b) = \frac{b^2 + b + 50}{50b}, \text{ với } b \in [2; 48] \text{ (} b \in \mathbb{Z} \text{)}$$

$$\text{Xét hàm số đặc trưng: } f(t) = \frac{t^2 + t + 50}{50t}, t \in [2; 48] \text{ (} t \in \mathbb{R} \text{)}$$

$$f'(t) = \frac{1}{50} \left(1 - \frac{50}{t^2} \right); f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 = 50$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -5\sqrt{2} \notin [2; 48] \\ t = 5\sqrt{2} \in [2; 48] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	2	7	$5\sqrt{2}$		48
$f'(t)$		-	+	0	+
$f(t)$		$f(7)$		$f(8)$	

$$\Rightarrow \min_{[2; 48]} f(b) = \min \{f(7), f(8)\}$$

Ta có :

$$\begin{cases} f(7) = \frac{53}{175} \\ f(8) = \frac{61}{200} \end{cases} \Rightarrow f(7) < f(8)$$

$$\Rightarrow \min_{[2; 48]} f(b) = f(7) = \frac{53}{175}, \text{ khi } b = 7$$

$$\Rightarrow \min S = \frac{53}{175}, \text{ đạt được khi: } a = 1, b = 7, c = 8, d = 50.$$

ĐỀ SỐ 9

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 6, NĂM 2002

Câu I. (Đại học 2,0 điểm; Cao đẳng: 3,0 điểm).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (1)
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (1) và trục hoành.

Câu II. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 2,0 điểm).

1. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_x(x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y(y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3 \end{cases}$$

Câu III. (Đại học: 2,0 điểm; Cao đẳng: 4,0 điểm).

1. Cho hình tứ diện đều ABCD, cạnh $a = 6\sqrt{2}$ cm. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $d_m: mx - y - 1 = 0$.
 - a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, đường thẳng d_m luôn cắt elip (E) tại điểm phân biệt.
 - b) Viết phương trình tiếp tuyến của (E), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $N(1; -3)$.

Câu IV. (Đại học: 1,0 điểm; Cao đẳng: 1,0 điểm).

Gọi $a_1, a_2, \dots, a_{11}$ là các hệ số trong khai triển sau :

$$(x+1)^{10} \cdot (x+2) = x^{11} + a_1 x^{10} + a_2 x^9 + \dots + a_{11}.$$

Hãy tính hệ số a_5 .

Câu V. (Đại học: 2,0 điểm).

1. Tìm giới hạn : $L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x-1)^2}$
2. Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$. Gọi a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB và h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác. Chứng minh rằng : $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geq 3$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

- Miền xác định : $D = \mathbb{R}$

- $y' = x^2 - 4x + 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y			$\frac{4}{3}$		0	$+\infty$

$-\infty \nearrow \frac{4}{3} \searrow 0 \nearrow +\infty$

- Tính lồi, lõm và điểm uốn :

$$y'' = 2x - 4$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$	
y''		-	0	+
Đồ thị				

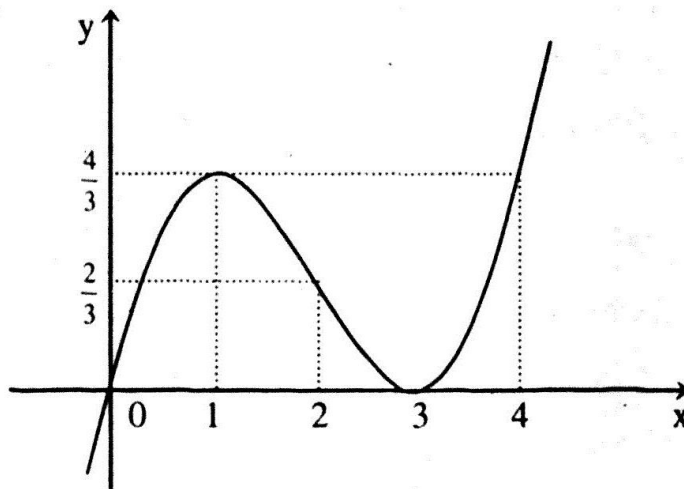
lồi Điểm uốn
 $I\left(2; \frac{2}{3}\right)$ lõm

- Điểm đặc biệt:

$$y = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 3$$

$$x = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

- Đồ thị:



2. Tính diện tích hình phẳng

Dựa vào đồ thị ta thấy diện tích cần tìm là:

$$S = \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right) dx = \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right) \Big|_0^3 = \frac{9}{4} \text{ (đvdt)}.$$

Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{\frac{1}{8\cos^2 x}} = \sin x \Leftrightarrow \frac{1}{8\cos^2 x} = \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 8\sin^2 x \cos^2 x = 1 \quad \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình :

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k2\pi. \\ x = \frac{3\pi}{8} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{8} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải hệ phương trình

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 0 < x \neq 1; x^3 + 2x^2 - 3x - 5y > 0 \\ 0 < y \neq 1; y^3 + 2y^2 - 3y - 5x > 0 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{cases} \log_x (x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y (y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 2x^2 - 3x - 5y = x^3 \\ y^3 + 2y^2 - 3y - 5x = y^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 5y = 0 \quad (1) \\ 2y^2 - 3y - 5x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế, ta có:

$$2(x^2 - y^2) + 2(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)(x + y + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 1 = 0: \text{ vô nghiệm } \forall x, y > 0 \end{cases}$$

Thế $y = x$ vào (1), ta có : $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = y = 4$ (do $x > 0$)

So với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là : $x = y = 4$.

Câu III.

1. Tính độ dài đoạn vuông góc chung

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC

Ta có : $\triangle ABD = \triangle CAD$

$\Rightarrow BM = CM \Rightarrow \triangle MBC$ cân tại M

$\Rightarrow MN \perp BC$ (1)

Tương tự, ta cũng có: $MN \perp AD$ (2)

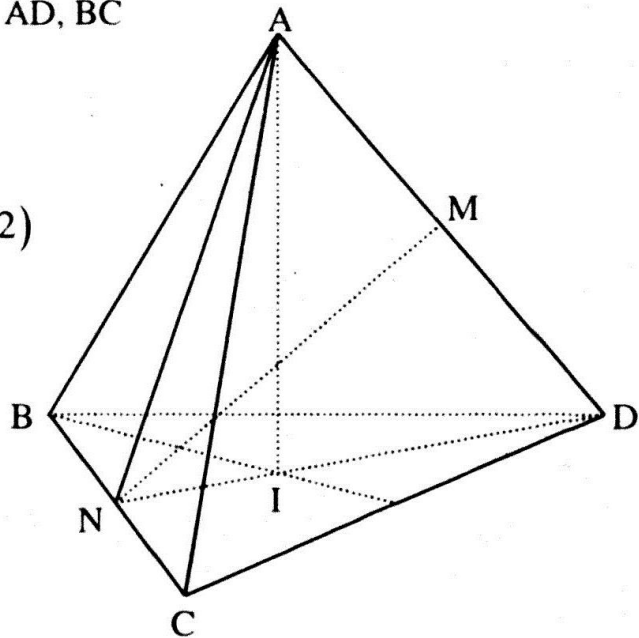
Từ (1) và (2), suy ra MN là đoạn vuông góc chung của AD và BC.

Ta có : $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CN = \frac{a}{2}$

$\triangle MNC$ vuông tại N cho :

$$MN^2 = CM^2 - CN^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$



2. a) Chứng minh

Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và d_m :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(mx - 1)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow (9m^2 + 4)x^2 - 18mx - 27 = 0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta' = 81m^2 + 27(9m^2 + 4) > 0, \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Vậy, d_m luôn luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt.

b) Viết phương trình tiếp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ qua N có dạng :

$$A(x - 1) + B(y + 3) = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \Leftrightarrow Ax + By + 3B - A = 0$$

Δ tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$

$$\Leftrightarrow 9A^2 + 4B^2 = (3B - A)^2 \Leftrightarrow 5B^2 - 6AB - 8A^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B = 2A : \text{chọn } A = 1, B = 2 \\ B = -\frac{4}{5}A : \text{chọn } A = 5, B = -4 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm : $\Delta_1 : x + 2y + 5 = 0$; $\Delta_2 : 5x - 4y - 17 = 0$.

Câu IV. Tính hệ số a_5

$$\text{Ta có: } (x+1)^{10}(x+2) = (x+1)^{10} + (x+1)^{11}$$

$$(x+1)^{10} = x^{10} + C_{10}^1 x^9 + C_{10}^2 x^8 + C_{10}^3 x^7 + C_{10}^4 x^6 + C_{10}^5 x^5 + C_{10}^6 x^4 + C_{10}^7 x^3 + C_{10}^8 x^2 + C_{10}^9 x + C_{10}^{10}$$

$$(x+1)^{11} = x^{11} + C_{11}^1 x^{10} + C_{11}^2 x^9 + C_{11}^3 x^8 + C_{11}^4 x^7 + C_{11}^5 x^6 + C_{11}^6 x^5 + C_{11}^7 x^4 + C_{11}^8 x^3 + C_{11}^9 x^2 + C_{11}^{10} x + C_{11}^{11}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x+1)^{10}(x+2) &= x^{11} + (1 + C_{11}^1)x^{10} + (C_{10}^1 + C_{11}^2)x^9 + (C_{10}^2 + C_{11}^3)x^8 \\ &+ (C_{10}^3 + C_{11}^4)x^7 + (C_{10}^4 + C_{11}^5)x^6 + (C_{10}^5 + C_{11}^6)x^5 + (C_{10}^6 + C_{11}^7)x^4 + \dots + C_{10}^{10} + C_{11}^{11} \\ \Rightarrow \text{Hệ số } a_5 &\text{ là : } C_{10}^4 + C_{11}^5 = 672. \end{aligned}$$

Câu V.

1. Tìm giới hạn

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } L &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 6x + 5}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5) = 15. \end{aligned}$$

2. Chứng minh bất đẳng thức

$$\text{Ta có : } S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{ha} = \frac{a}{3}, \frac{1}{hb} = \frac{b}{3}, \frac{1}{hc} = \frac{c}{3}$$

$$\text{Do đó: } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) \geq 3 \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\bullet \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \quad (1)$$

$$\bullet \quad a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (2)$$

$$\text{Nhân (1) và (2) vế theo vế, ta có: } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9 \quad (\text{đpcm}).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

ĐỀ SỐ 10

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI A, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số : $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$ (1) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = -1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và hai điểm đó có hoành độ dương.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình : $\cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$.

2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$$

Câu III. (3 điểm).

1. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ ($a > 0, b > 0$). Gọi M là trung điểm cạnh CC'.
 - a) Tính thể tích khối tứ diện BDA'M theo a và b.
 - b) Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng (A'BD) và (MBD) vuông góc nhau.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^k trong khai triển nhị thức Niu tơn của

$$\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5} \right)^n, \text{ biết rằng } C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$$

(n là số nguyên dương, $x > 0$, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

2. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$.

Câu V. (1 điểm)

Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}.$$

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số khi $m = -1$

Khi $m = -1$, ta có: $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 1} = -x - \frac{1}{x - 1}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x - 1)^2}$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$

- Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \Rightarrow y = -x$ là tiệm cận xiên

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'	-		0	+		+	0	-	
y	$-\infty$				$+\infty$		-3		$-\infty$

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 0$
- Đồ thị: hình bên

2. Tìm m

Phương trình hoành độ giao điểm của (1) và Ox :

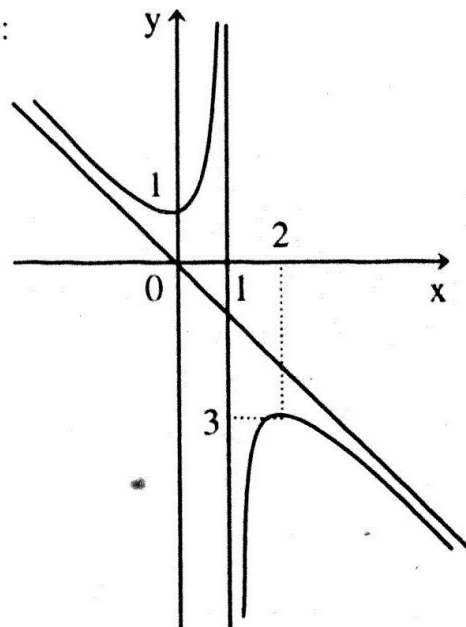
$$\frac{mx^2 + x + m}{x - 1} = 0$$

$$\Leftrightarrow g(x) = mx^2 + x + m = 0 \quad (x \neq 1) (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = 1 - 4m^2 > 0 \\ S = \frac{-1}{m} > 0 \\ P = 1 > 0, \forall m \\ g(1) = 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \\ m < 0 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0.$$



Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \operatorname{tg} x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có: } \cot gx - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{tg} x} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cot gx - 1 = \frac{\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin x + \cos x} + \sin^2 x - \sin x \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cot gx - 1 = \cos x (\cos x - \sin x) + \sin x (\sin x - \cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = (\cos x - \sin x)^2$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) \left[\frac{1}{\sin x} + \sin x - \cos x \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (\sin^2 x - \sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x) (\cos 2x + \sin 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \cos 2x + \sin 2x - 3 = 0: \text{ vô nghiệm} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là : $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Giải hệ phương trình

$$\text{Xét: } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện : $x \neq 0, y \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow (x - y) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow (x - y) + \frac{x - y}{xy} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(xy + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ xy + 1 = 0 \end{cases}$$

• Với $x = y$

$$(2) \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

• Với $xy + 1 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x}$

$$(2) \Leftrightarrow x^4 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0: \text{ vô nghiệm}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình:

$$x = y = 1 \vee x = y = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \vee x = y = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Câu III.

1. Tính số đo của nhị diện

Giả sử hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a

Trong $\Delta A'BC$ kẻ đường cao BH

Ta có: $\Delta A'BC = \Delta A'DC$ nên $DH \perp A'C$

$\Rightarrow \widehat{BID} = \varphi$ là góc phẳng của nhị diện $[B, A'C, D]$

$\Delta A'BC$ vuông tại B có BI là đường cao, cho:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{A'B^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow BH = DH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Áp dụng định lý côsin trong ΔBHD , ta có:

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH.DH \cos \varphi$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = \frac{4a^2}{3}(1 - \cos \varphi) \Leftrightarrow \cos \varphi = -\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 120^\circ.$$

2. a) Tính thể tích khối tứ diện $BDA'M$

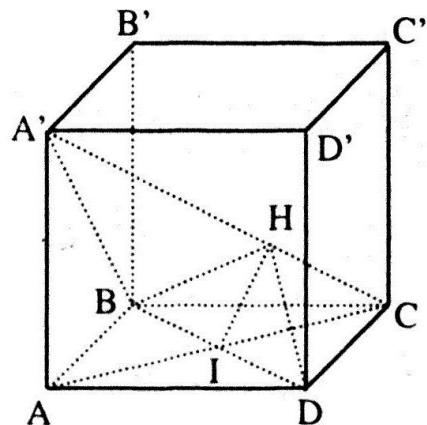
Ta có: $\overrightarrow{A'B} = (a; 0; -b)$, $\overrightarrow{A'D} = (0; a; -b)$

M là trung điểm của CC' nên $M\left(a; a; \frac{b}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(a; a; -\frac{b}{2}\right)$

$$[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] = (ab; ab; a^2)$$

Thể tích tứ diện $BDA'M$:

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D}] \cdot \overrightarrow{A'M}| = \frac{1}{6} \left| a^2b + a^2b - \frac{a^2b}{2} \right| = \frac{a^2b}{4} \text{ (đvdt)}.$$



b) Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$

Phương trình mặt phẳng $(A'BD)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1$$

Mặt phẳng $(A'BD)$ có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n}_1 = \left(\frac{1}{a}; \frac{1}{a}; \frac{1}{b} \right)$$

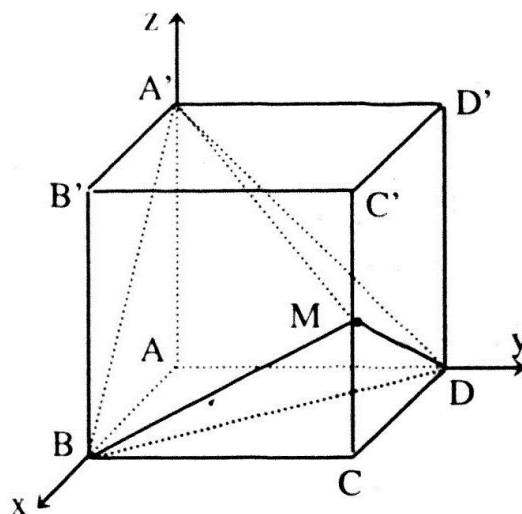
Ta có: $\vec{BM} = \left(0; a; \frac{b}{2} \right)$, $\vec{BD} = (-a; a; 0)$

Mặt phẳng (MBD) có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n}_2 = [\vec{BM}, \vec{BD}] = -\frac{a}{2}(b; b; -2a)$$

$$(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} \cdot b + \frac{1}{a} \cdot b + \frac{1}{b} \cdot (-2a) = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1.$$



Câu IV.

1. Tìm hệ số của x^8

Ta có: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$, $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+4)!}{3!(n+1)!} - \frac{(n+3)!}{3!n!} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n+3)(n+4) - (n+1)(n+2)(n+3) = 42(n+3)$$

$$\Leftrightarrow n = 12$$

Xét nhị thức: $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5} \right)^{12}$

$$\text{Số hạng tổng quát: } T_{k+1} = C_{12}^k a^{12-k} \cdot b^k = C_{12}^k \cdot \left(\frac{1}{x^3} \right)^{12-k} \cdot \left(\sqrt{x^5} \right)^k = C_{12}^k \cdot x^{\frac{11k}{2} - 36}$$

$$\text{Hệ số của } x^8 \text{ ứng với } k \text{ thỏa: } \frac{11k}{2} - 36 = 8 \Leftrightarrow k = 8$$

Vậy hệ số của x^8 là: $C_{12}^8 = 495$.

2. Tính tích phân

$$\text{Ta có: } I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}}. \text{ Đặt } t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow t^2 = x^2+4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = t^2 - 4 \\ x dx = t dt \end{cases}$$

Đổi cận :

$$I = \int_3^4 \frac{x}{t(t^2-4)} dt = \int_3^4 \frac{dt}{t^2-4} = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{t-2}{t+2} \right| \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}.$$

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Trong mặt phẳng Oxy, ta xét các vectơ:

$$\vec{a} = \left(x; \frac{1}{x} \right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}; \quad \vec{b} = \left(y; \frac{1}{y} \right) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}}$$

$$\vec{a} = \left(z; \frac{1}{z} \right) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(x+y+z; \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{(x+y+z)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2}. \text{ Ta có: } |\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| \geq |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$$

$$\Leftrightarrow S = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{(x+y+z)^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3}{\frac{x+y+z}{3}} = \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow S \geq \sqrt{(x+y+z)^2 + \frac{81}{(x+y+z)^2}}$$

$$\text{Đặt } t = (x+y+z)^2, \quad 0 < t \leq 1. \text{ Ta có: } S \geq \sqrt{t + \frac{81}{t}}$$

$$\text{Xét hàm số: } f(t) = t + \frac{81}{t}, \quad t \in (0; 1]; \quad f'(t) = 1 - \frac{81}{t^2} = \frac{t^2 - 81}{t^2} < 0, \quad \forall t \in (0; 1]$$

Bảng biến thiên :

t	0	1
$f'(t)$		
$f(t)$		

$$\Rightarrow f(t) \geq 82, \quad \forall t \in (0; 1] \Rightarrow S \geq \sqrt{82} \quad (\text{đpcm}).$$

ĐỀ SỐ 11

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI B, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ (1) (m là tham số)

1. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm phân biệt đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 2$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\cot gx - \tan gx + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases}$$

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$. Biết $M(1; -1)$ là trung điểm cạnh BC và $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$ là trọng tâm tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
2. Cho hình lăng trụ đứng ABCD. A'B'C'D' có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng. Hãy tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.
3. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz, cho hai điểm $A(2; 0; 0)$, $B(0; 0; 8)$ và điểm C sao cho $\overrightarrow{AC} = (0; 6; 0)$. Tính khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

Câu IV. (2 điểm).

1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = x + \sqrt{4 - x^2}$.

2. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$.

Câu V. (2 điểm).

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng: $C_n^0 + \frac{2^2 - 1}{2} C_n^1 + \frac{2^3 - 1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} C_n^n$

(C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

GIẢI

Câu I.

1. Tìm m

Gọi đồ thị của hàm số đã cho là (C_m) và $A(x_0; y_0), B(-x_0; -y_0)$ ($x_0 \neq 0$) là hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ

Ta có : $A \in (C_m) \Rightarrow y_0 = x_0^3 - 3x_0^2 + m$ (1)

$B \in (C_m) \Rightarrow -y_0 = -x_0^3 - 3x_0^2 + m$ (2)

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế, ta được: $-6x_0^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{m}{3}$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

2. Khảo sát hàm số khi $m = 2$

Khi $m = 2$, ta có: $y = x^3 - 3x^2 + 2$

- Miền xác định : $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

- Tính lồi lõm và điểm uốn:

$$y'' = 6x - 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lồi	Đ. U I(1;0)	lõm

- Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1 \vee x = 1 \pm \sqrt{3}$$

• Đồ thị:

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện : $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $\cot gx - \operatorname{tg} x + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos 2x}{\sin 2x} + 4 \sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2 \sin^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = \pm \frac{\pi}{6} + m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$.

2. Giải hệ phương trình

Điều kiện : $x > 0, y > 0$

Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 & (1) \\ 3xy^2 = x^2 + 2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) vế theo vế, ta có : $3xy(x - y) = y^2 - x^2$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y + 3xy) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y + 3xy = 0: \text{ vô nghiệm (do } x > 0, y > 0) \end{cases}$$

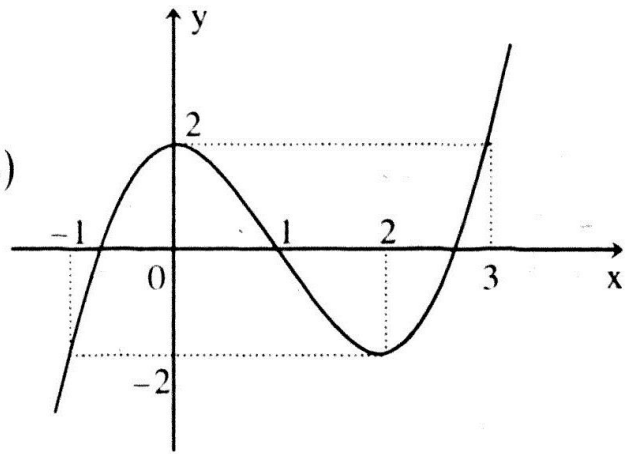
$$\Leftrightarrow x = y$$

Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow 3x^3 - x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(3x^2 + 2x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 3x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là : $x = y = 1$.



Câu III.

1. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

$\triangle ABC$ có $AB=AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ nên vuông cân tại A

G là trọng tâm $\triangle ABC$ nên ta có:

$$\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}, \text{ với } \overrightarrow{MA} = (x_A - 1; y_A + 1), \overrightarrow{MG} = \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - 1 = 3\left(-\frac{1}{3}\right) \\ y_A + 1 = 3 \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = 2 \end{cases} \Rightarrow A(0; 2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1; -3) \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

$\triangle ABC$ cân tại A $\Rightarrow AM \perp BC$

Đường thẳng BC qua M và nhận $\overrightarrow{AM} = (1; -3)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình: $1 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 4 = 0$

$$\text{Đặt } B(4 + 3t; t) \in (BC) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4 + 3t; t - 2)$$

M là trung điểm BC nên ta có :

$$\begin{cases} x_C = 2x_M - x_B = -3t - 2 \\ y_C = 2y_M - y_B = -t - 2 \end{cases} \Rightarrow C(-3t - 2; -t - 2)$$

$$\text{Khi đó : } BC = 2AM = 2\sqrt{10} \Leftrightarrow BC^2 = 40$$

$$\Leftrightarrow 36(t + 1)^2 + 4(t + 1)^2 = 40 \Leftrightarrow (t + 1)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow B(4; 0), C(-2; -2) \\ t = -2 \Rightarrow B(-2; -2), C(4; 0) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(0; 2), B(4; 0), C(-2; -2) \text{ hay } A(0; 2), B(-2; -2), C(4; 0)$$

Cách khác

$\triangle ABC$ vuông cân tại A có M là trung điểm BC

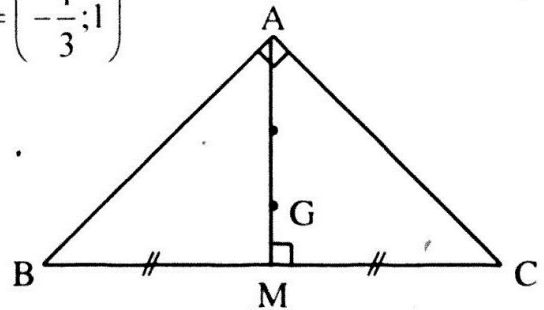
$\Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$

Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp $\triangle ABC : (C) : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10$

Toạ độ B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y - 4 = 0 \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } A(0; 2), B(4; 0), C(-2; -2) \text{ hay } A(0; 2), B(-2; -2), C(4; 0)$$



2.

- **Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc một mặt phẳng**

Do M, N lần lượt là trung điểm của AA' và

CC' nên ta có: $\begin{cases} AM \parallel NC' \\ AM = NC' \end{cases} \Rightarrow$ Tứ giác $AMC'N$

là hình bình hành

Gọi $I = MN \cap AC'$ thì I là trung điểm của MN và AC' (1)

Mặt khác: Tứ giác $AB'C'D$ là hình bình hành

$J = AC' \cap B'D$ thì J là trung điểm của AC' và $B'D$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $I \equiv J \Rightarrow I$ là trung điểm của MN và $B'D$

$\Rightarrow$ Tứ giác $B'MDN$ là hình bình hành

Vậy bốn điểm B', M, D, N đồng phẳng (đpcm).

- **Tính độ dài cạnh AA' theo a để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông**

Ta có: $\triangle DAM = \triangle DCN \Rightarrow DM = DN \Rightarrow$ Tứ giác $B'MDN$ là hình thoi

Do đó, để tứ giác $B'MDN$ là hình vuông ta phải có $MN = B'D$

$$\Leftrightarrow MN^2 = B'D^2 \Leftrightarrow AC^2 = BB'^2 + BD^2$$

$$\Leftrightarrow (a\sqrt{3})^2 = BB'^2 + a^2 \Leftrightarrow BB'^2 = 2a^2 \Leftrightarrow BB' = a\sqrt{2} = AA'$$

Vậy $AA' = a\sqrt{2}$.

3. Tính khoảng cách từ I đến OA .

Đặt $C(x, y, z)$, ta có: $\overrightarrow{AC} = (x-2; y; z) = (0; 6; 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y=6 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=6 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow C(2; 6; 0)$$

I là trung điểm $BC \Rightarrow I(1; 3; 4)$

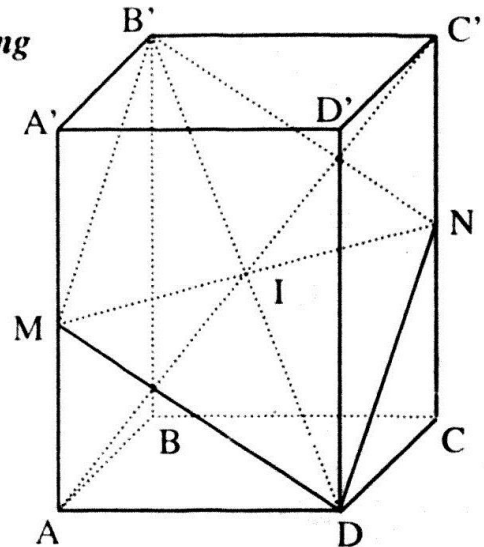
Ta có: $[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}] = (0; 8; -6)$

$$\text{Khoảng cách từ } I \text{ đến } OA: d(I, OA) = \frac{[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}]}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{\sqrt{64+36}}{2} = 5.$$

Câu IV.

1. **Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất:** $y = x + \sqrt{4-x^2}$

Miền xác định: $D = [-2; 2]$



$$y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}, \quad x \in (-2; 2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4-x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2\sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	-2	$\sqrt{2}$	2
y'		+	0
y		-2	$2\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy: $\text{Max}_{[-2;2]} y = 2\sqrt{2}$, đạt được khi $x = \sqrt{2}$.

$\text{Min}_{[-2;2]} y = -2$, đạt được khi $x = 2$.

2. Tính tích phân

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2\sin^2 x}{1+\sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\cos x + \sin x)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x + \sin x)}{\cos x + \sin x} = \ln|\cos x + \sin x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Câu V. Tính tổng

Xét nhị thức: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow \int_1^2 (1+x)^n dx = \int_1^2 [C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n] dx$$

$$\Rightarrow \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \Big|_1^2 = \left[C_n^0 x + \frac{1}{2} C_n^1 x^2 + \frac{1}{3} C_n^2 x^3 + \frac{1}{4} C_n^3 x^4 + \dots + \frac{1}{n+1} C_n^n x^{n+1} \right] \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^3-1}{3} C_n^2 + \frac{2^4-1}{4} C_n^3 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.$$

ĐỀ SỐ 12

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI D, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ (1)
2. Tìm m để đường thẳng $d_m: y = mx + 2 - 2m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm phân biệt.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$
2. Giải phương trình: $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcac vuông góc Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ và đường thẳng d: $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với đường tròn (C) qua đường thẳng d. Tìm tọa độ các giao điểm của (C) và (C').
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đềcac vuông góc Oxyz, cho đường thẳng: $d_k: \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}$
Tìm k để đường thẳng d_k vuông góc với mặt phẳng (P): $x - y - 2z + 5 = 0$.
3. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau, có giao tuyến là đường thẳng Δ . Trên Δ lấy hai điểm A, B với $AB = a$. Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong mặt phẳng (Q) lấy điểm D sao cho AC, BD cùng vuông góc với Δ và $AC = BD = AB$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD và tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD) theo a.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} \text{ trên đoạn } [-1; 2].$$

2. Tính tích phân: $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$.

Câu V. (1 điểm)

Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2 + 1)^n (x + 2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3} = 26n$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số: $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = x + \frac{4}{x - 2}$

- Miền xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = 4 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$
- Giới hạn và tiệm cận :
 $\lim_{x \rightarrow 2} y = \infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x - 2} = 0 \Rightarrow y = x$ là tiệm cận xiên
- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
y'	+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$		-2		$+\infty$	6	$+\infty$

- Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = -2$
 $y = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$
- Đồ thị: hình bên

2. Tìm m

Phương trình hoành độ giao điểm của (1) và d_m :

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = mx + 2 - 2m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = (x - 2)(mx + 2 - 2m) \quad (x \neq 2)$$

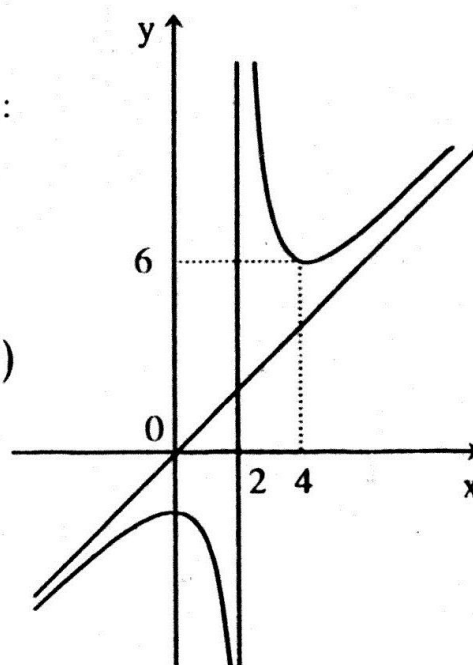
$$\Leftrightarrow g(x) = (m - 1)x^2 + 4(1 - m)x + 4m - 8 = 0 \quad (*)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*)

có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta' = 4m - 4 > 0 \\ g(2) = -4 \neq 0, \forall m \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m > 1$.



Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right] \tan^2 x - \frac{1}{2} (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x) \sin^2 x - \cos^2 x (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos^2 x) - (1 + \cos x)(1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 + \cos x)(\cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \text{ (loại, do } \cos x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 1) \\ \cos x = -1 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = \pi + m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải phương trình

Ta có: $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} - 4 \cdot 2^{x-x^2} = 3$

Đặt $t = 2^{x^2-x}$, $t > 0$. Ta được:

$$t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1 \vee x = 2$

Câu III.

1. Viết phương trình đường tròn (C')

(C) có tâm I(1;2) và bán kính R = 2

Gọi I' và R' lần lượt là tâm và bán kính đường tròn (C')

Do (C) và (C') đối xứng nhau qua (d) nên I, I' đối xứng nhau qua (d) và $R' = R = 2$

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với d

Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $x + y + C = 0$

$$I \in \Delta \Rightarrow C = -3 \Rightarrow \Delta: x + y - 3 = 0$$

Gọi $H = \Delta \cap (d)$ thì tọa độ của H thỏa hệ:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(2;1)$$

H là trung điểm của II' nên ta có:

$$\begin{cases} x_{I'} = 2x_M - x_I = 4 - 1 = 3 \\ y_{I'} = 2y_M - y_I = 2 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'(3;0)$$

Phương trình đường tròn (C') có dạng: $(x-3)^2 + y^2 = 4$

Giao điểm của (C) và (C') cũng chính là giao điểm của (C') và (d)

Tọa độ giao điểm của (C') và d thỏa hệ:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 4 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + (x-1)^2 = 4 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy có hai giao điểm: $A(1;0)$, $B(3;2)$.

2. Xác định k để $d_k \perp (P)$

d_k có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3k-1; -k-1; -1-3k^2)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1; -2)$

$$d_k \perp (P) \Leftrightarrow \vec{a} \text{ cùng phương với } \vec{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3k-1}{1} = \frac{-k-1}{-1} = \frac{-1-3k^2}{-2} \Leftrightarrow k=1$$

Vậy giá trị cần tìm là: $k=1$.

3.

• Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD

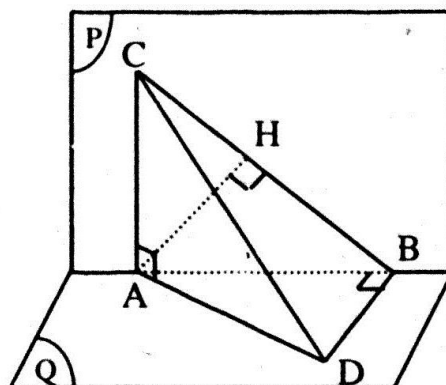
Ta có:

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ \Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow AC \perp (Q) \\ AC \perp \Delta \end{cases}$$

$$\Rightarrow AC \perp AD \Rightarrow \widehat{CAD} = 90^\circ \quad (1)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $BD \perp (P)$

$$\Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow \widehat{CBD} = 90^\circ \quad (2)$$



Từ (1) và (2) suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có tâm là trung điểm I của CD và bán kính $R = \frac{CD}{2}$.

$\triangle ABD$ vuông cân tại B nên $AD = a\sqrt{2}$

$\triangle ACD$ vuông tại A cho:

$$CD = \sqrt{AC^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}CD = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

• **Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD)**

Ta có : $\begin{cases} BD \perp (ABC) \\ BD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (ABC) \perp (BCD) \text{ theo giao tuyến } BC$

Gọi H là trung điểm BC thì $AH \perp BC$ (do $\triangle BAC$ cân tại A)

$\Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BCD)

$\triangle ABC$ vuông cân tại A nên $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu IV.

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

$$y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}, x \in [-1; 2]. \quad y' = \frac{1-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1; 2]$$

Bảng biến thiên :

x	-1	1	2	
y'		+	0	-
y			$\sqrt{2}$	$\frac{3}{\sqrt{5}}$

Từ bảng biến thiên ta thấy : $\text{Max}_{[-1;2]} = \sqrt{2}$, khi $x = 1$

$\text{Min}_{[-1;2]} = 0$, khi $x = -1$.

2. Tính tích phân

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 |x^2 - x| dx = \int_0^1 |x^2 - x| dx + \int_1^2 |x^2 - x| dx = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 \end{aligned}$$

$$I = 1.$$

Câu V. Tìm n

Ta có : $(x^2 + 1)^n = C_n^0 \cdot x^{2n} + C_n^1 x^{2n-2} + C_n^2 x^{2n-4} + \dots + C_n^n$

$$(x + 2)^n = C_n^0 \cdot x^n + 2C_n^1 x^{n-1} + 2^2 C_n^2 x^{n-2} + 2^3 C_n^3 x^{n-3} + \dots + 2^n C_n^n$$

Mặt khác : $(x^2 + 1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i \cdot x^{2(n-i)}$

$$(x + 2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot x^{n-k} 2^k$$

$$\Rightarrow (x^2 + 1)^n (x + 2)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i x^{2n-2i} \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k x^{n-k} 2^k$$

Hệ số a_{3n-3} ứng với i, k, n thỏa

$$x^{2n-2i} \cdot x^{n-k} = x^{3n-3} \Leftrightarrow x^{3n-2i-k} = x^{3n-3}$$

$$\Leftrightarrow 3n - 2i - k = 3n - 3 \Leftrightarrow 2i + k = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i = 0, k = 3 \\ i = k = 1 \end{cases}$$

• Với $i = 0, k = 3$: Hệ số của x^{3n-3} là : $8 \cdot C_n^0 \cdot C_n^3$

• Với $i = k = 1$: Hệ số của x^{3n-3} là $2(C_n^1)^2$

$$x^{3n-3} = x^{2n-2} \cdot x^{n-1} = x^{2n} \cdot x^{n-3} \Rightarrow a_{3n-3} = C_n^0 \cdot 2^3 \cdot C_n^3 + C_n^1 \cdot 2C_n^1$$

Theo đề bài ta có: $a_{3n-3} = 26n$

$$\Leftrightarrow C_n^0 \cdot 2^3 \cdot C_n^3 + C_n^1 \cdot 2C_n^1 = 26n \Leftrightarrow 8C_n^3 + 2(C_n^1)^2 = 26n$$

$$\Leftrightarrow 8 \cdot \frac{n!}{(n-3)!3!} + 2 \frac{n!}{(n-1)!} \cdot \frac{n!}{(n-1)!} = 26n$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(n-2)(n-1)n}{3} + n^2 = 13n \Leftrightarrow 2n^2 - 3n - 35 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -\frac{7}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là : $n = 5$.

ĐỀ SỐ 13

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \frac{2x^2 - 4x - 3}{2(x - 1)}$.

2. Tìm m để phương trình : $2x^2 - 4x - 3 + 2m|x - 1| = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $3 - \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 2 \sin x) + 6 \cos x = 0$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y \\ 2^x + 2^y = 3 \end{cases}$$

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y^2 = x$ và điểm $I(0; 2)$. Tìm tọa độ hai điểm M, N thuộc (P) sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho tứ diện ABCD với $A(2; 3; 2), B(6; -1; -2), C(-1; -4; 3), D(1; 6; -5)$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

3. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = a$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$, cạnh bên $BB' = a$. Gọi I là trung điểm CC' . Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

Câu IV. (2 điểm).

1. Có bao nhiêu số tự nhiên chia hết cho 5 mà mỗi số có 4 chữ số khác nhau ?

2. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx$.

Câu V. (1 điểm).

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = \sin^5 x + \sqrt{3} \cos x$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số : $y = \frac{2x^2 - 4x - 3}{2(x - 1)} = x - 1 - \frac{5}{2(x - 1)}$

- Miền xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $y' = \frac{2x^2 - 4x + 7}{2(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

- Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2(x-1)} \Rightarrow y = x - 1$ là tiệm cận xiên

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+		+	
y	$-\infty$		$+\infty$		$+\infty$

- Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$$

- Đồ thị :

2. Tìm m

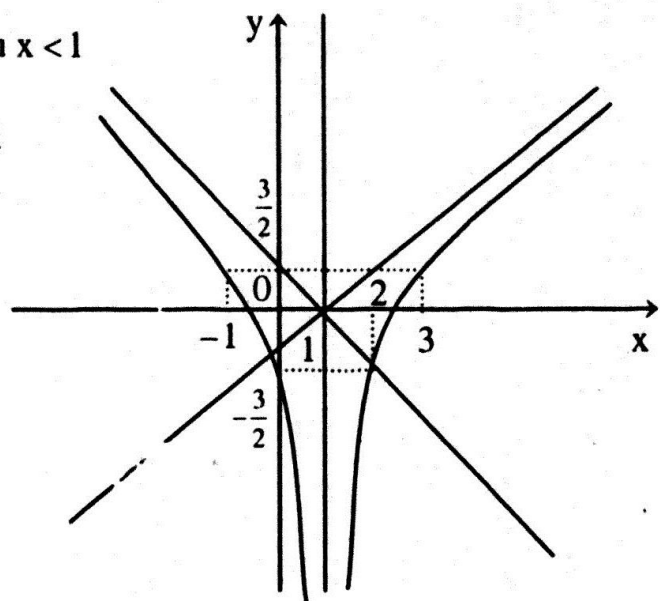
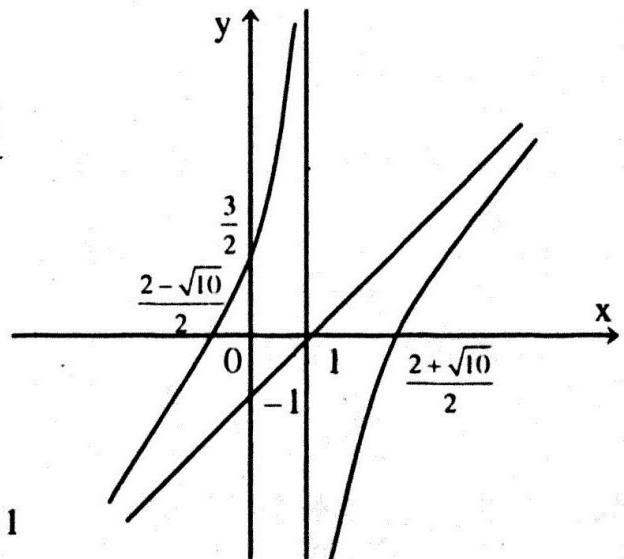
Xét: $y = \frac{2x^2 - 4x - 3}{2|x-1|} (C')$

Ta có:

$$y = \begin{cases} \frac{2x^2 - 4x - 3}{2(x-1)} & \text{nếu } x > 1 \\ -\frac{2x^2 - 4x - 3}{2(x-1)} & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$$

Do đó, từ đồ thị (C) ta suy ra đồ thị (C') như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải tiệm cận đứng (ứng với $x > 1$), ta được (C'_1)
- Lấy đối xứng phần còn lại của đồ thị (C) qua trục Ox, ta được (C'_2)
- $(C') = (C'_1) \cup (C'_2)$



Ta có: $2x^2 - 4x - 3 + 2m|x - 1| = 0 \quad (*)$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 3 = -2m|x - 1| \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x - 3}{2|x - 1|} = -m$$

(do $x = 1$ không thỏa phương trình, $\forall m$)

Số nghiệm của phương trình (*) là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $y = m$. Từ đồ thị (C') ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Câu II. 1. Giải phương trình

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $3 - \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 2 \sin x) + 6 \cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 3(1 + 2 \cos x) - \operatorname{tg}^2 x (1 + 2 \cos x) = 0 \Leftrightarrow (1 + 2 \cos x)(3 - \operatorname{tg}^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \\ \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Giải hệ phương trình

Xét: $\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y & (1) \\ 2^x + 2^y = 3 & (2) \end{cases}$. Điều kiện: $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ 0 < y \neq 1 \end{cases}$.

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_y xy = \log_x y \Leftrightarrow 2 \log_x y - \log_y x - 1 = 0$$

Đặt $t = \log_y x \Rightarrow \log_x y = \frac{1}{t} \quad (t \neq 0)$, ta có:

$$\frac{2}{t} - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_y x = 1 \\ \log_y x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = \frac{1}{y^2} \end{cases}$$

• Với $x = y$: $(2) \Leftrightarrow 2^x + 2^x = 3 \Leftrightarrow 2^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = \log_2 \frac{3}{2}$.

• Với $x = \frac{1}{y^2}$: $(2) \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{y^2}} + 2^y = 3 \quad (*)$

+ Xét $0 < y < 1$, ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{y^2} > 1 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{y^2}} > 2 \\ 2^y > 1 \end{cases} \Rightarrow 2^{\frac{1}{y^2}} + 2^y > 3 \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm, } \forall y \in (0;1)$$

+ Xét $y > 1$, ta có:

$$\begin{cases} 1 > \frac{1}{y^2} > 0 \\ y > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\frac{1}{y^2}} > 1 \\ 2^y > 2 \end{cases} \Rightarrow 2^{\frac{1}{y^2}} + 2^y > 3 \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm, } \forall y > 1$$

$\Rightarrow (*)$ vô nghiệm với mọi $0 < y \neq 1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x = y = \log_2 \frac{3}{2}$.

Câu III.

1. Tìm tọa độ của M, N

Đặt $M(m^2; m)$, $N(n^2; n)$ ($m \neq n$) thuộc (P), ta có:

$$\overrightarrow{IM} = (m^2; m-2), \overrightarrow{IN} = (n^2; n-2)$$

Do đó: $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m-2 = 4(n-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 4n^2 \\ m = 4n-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - 4n + 3 = 0 \\ m = 4n - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} n = 3 \\ m = 6 \end{cases}$$

Vậy điểm M, N cần tìm là: $M(4; -2)$, $N(1; 1)$ hay $M(36; 6)$, $N(9; 3)$.

2.

• Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; -4; -4)$, $\overrightarrow{CD} = (2; 10; -8)$

Gọi φ là góc hợp bởi AB và CD, ta có:

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = \frac{|4 \cdot 2 + (-4) \cdot 10 + (-4) \cdot (-8)|}{\sqrt{16+16+16} \cdot \sqrt{4+100+64}} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 90^\circ.$$

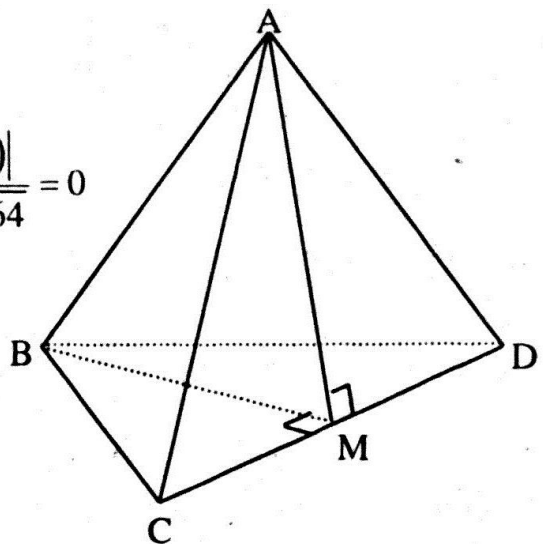
• Tìm tọa độ điểm M

Ta có: $AC = AD = \sqrt{59} \Rightarrow \triangle ACD$ cân tại A

$BC = BD = \sqrt{83} \Rightarrow \triangle BCD$ cân tại B

Gọi I là trung điểm của CD, ta có:

$$\begin{cases} AI \perp CD \\ BI \perp CD \end{cases}$$



Chu vi ΔABM là: $2p = AB + AM + BM$

Do AB không đổi nên $\text{Min}(2p) \Leftrightarrow \text{Min}(AM + BM)$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm của $CD \Rightarrow M(0;1;-1)$

Cách khác:

Phương trình đường thẳng CD :

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -4 + 5t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

Đặt $M(-1 + t; -4 + 5t; 3 - 4t) \in (CD)$, ta có :

$$AB = 4\sqrt{3}, AM = \sqrt{42(t-1)^2 + 17}, BM = \sqrt{42(t-1)^2 + 41}$$

Chu vi ΔABM là:

$$2p = 4\sqrt{3} + \sqrt{42(t-1)^2 + 17} + \sqrt{42(t-1)^2 + 41} \geq 4\sqrt{3} + \sqrt{17} + \sqrt{41}$$

$\Rightarrow \min(2p) = 4\sqrt{3} + \sqrt{17} + \sqrt{41}$, đạt được khi $t = 1 \Rightarrow M(0;1;-1)$.

3.

• **Chứng minh rằng tam giác $AB'I$ vuông ở A**

Áp dụng định lí côsin trong ΔABC , ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$

$$= 2a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{3} = B'C'$$

$\Delta B'C'I$ vuông tại C' , cho:

$$\begin{aligned} B'I &= \sqrt{B'C'^2 + IC'^2} \\ &= \sqrt{3a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2} \end{aligned}$$

$\Delta ABB'$ vuông cân tại B có $AB = BB' = a$

$$\Rightarrow AB' = a\sqrt{2}$$

ΔACI vuông tại C , cho:

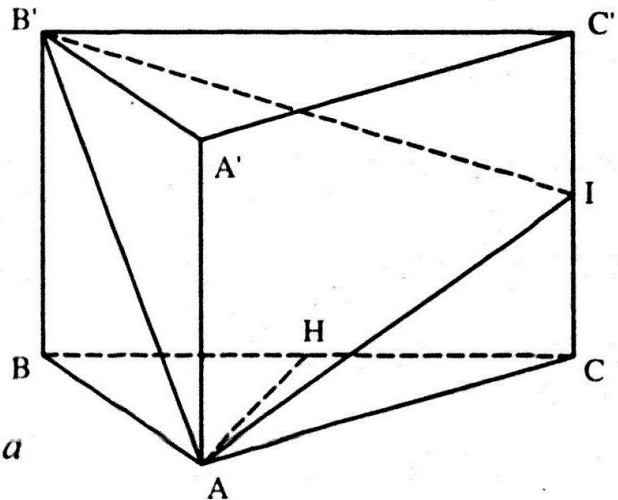
$$AI = \sqrt{AC^2 + IC^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Ta có: } AB'^2 + AI^2 = 2a^2 + \frac{5a^2}{4} = \frac{13a^2}{4} = B'I^2$$

Vậy $\Delta AB'I$ vuông tại A (đpcm).

• **Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$**

$$\text{Diện tích } \Delta ABC : S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$



$$\text{Diện tích } \Delta AB'I : S_{\Delta AB'I} = \frac{1}{2} AB' \cdot AI = \frac{a^2 \sqrt{10}}{4}$$

Gọi φ là góc giữa (ABC) và (AB'I)

ΔABC là hình chiếu của $\Delta AB'I$ trên mặt phẳng (ABC) nên ta có :

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AB'I} \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AB'I}} = \frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{\frac{a^2 \sqrt{10}}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu IV.

1. Tìm số

$$\text{Đặt } A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ($a_1 \neq 0$)

Số chia hết cho 5 có chữ số tận cùng bằng 0 hoặc 5

Trường hợp 1 : $a_4 = 0$

Chọn 3 chữ số thuộc $A \setminus \{0\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_9^3 cách

Trường hợp này có: $A_9^3 = 504$ (số).

Trường hợp 2 : $a_4 = 5$

Chọn $a_1 \in A \setminus \{0, 5\}$: có 8 cách

Chọn 2 chữ số thuộc $A \setminus \{a_1, 5\}$ xếp vào các vị trí còn lại : có A_8^2 cách

Trường hợp này có: $8 \cdot A_8^2 = 448$ (số).

Vậy có tất cả : $504 + 448 = 952$ (số).

2. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2 \cos^2 x} dx$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = \frac{1}{2} x \Rightarrow du = \frac{1}{2} dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \tan x \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.$$

Câu V. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

Xét hàm số : $y = \sin^5 x + \sqrt{3} \cos x$

Do $y = \sin^5 x + \sqrt{3} \cos x$ là hàm số tuần hoàn, chu kì 2π nên ta chỉ cần xét $x \in [0; 2\pi]$

$$y' = 5\sin^4 x \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin x (5\sin^3 x \cos x - \sqrt{3})$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & (1) \\ 5\sin^3 x \cos x - \sqrt{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Mà } x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x = 0; x = \pi; x = 2\pi$$

Xét hàm số :

$$g(x) = 5\sin^3 x \cos x - \sqrt{3}, \quad x \in [0; 2\pi]$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 5(3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x) \\ &= 5\sin^2 x (3\cos^2 x - \sin^2 x) \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; \pi; 2\pi \Rightarrow g(x) = -\sqrt{3} < 0 \\ x = \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3} \Rightarrow g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = 0: \text{ vô nghiệm}$$

$$\text{Ta có: } g(0) = \sqrt{3}, \quad g(\pi) = -\sqrt{3}, \quad g(2\pi) = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy: } \operatorname{Max} y = \sqrt{3}, \text{ khi } x = 0 \vee x = 2\pi$$

$$\operatorname{Min} y = -\sqrt{3}, \text{ khi } x = \pi.$$

ĐỀ SỐ 14

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 + (2m+1)x + m^2 + m + 4}{2(x+m)}$ (1) (m là tham số)

1. Tìm m để hàm số (1) có cực trị và tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 0$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\cos 2x + \cos x(2\lg^2 x - 1) = 2$.
2. Giải bất phương trình: $\sqrt{15 \cdot 2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1}$.

Câu III. (3 điểm).

1. Cho tứ diện ABCD với $AB = AC = a$, $BC = b$. Hai mặt phẳng (BCD) và (ABC) vuông góc với nhau và góc $\widehat{BDC} = 90^\circ$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD theo a và b.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \text{ và } d_2: \begin{cases} 3x - z + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

- a) Chứng minh rằng d_1, d_2 chéo nhau và vuông góc với nhau.
- b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 và song song với đường thẳng $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}$.

Câu IV. (2 điểm).

1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?
2. Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

Câu V. (1 điểm).

Tính các góc của tam giác ABC biết rằng:

$$\begin{cases} 4p(p-a) \leq bc \\ \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{8} \end{cases}$$

trong đó $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{a+b+c}{2}$.

GIẢI

Câu I.

1. Tìm m

Miền xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 4}{2(x+m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = x^2 + 2mx + m^2 - 4 = 0 \quad (*) \quad (x \neq -m)$$

Ta có: $\Delta' = 4 > 0, \forall m$

$$\text{Do đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m - 2 \Rightarrow y_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 = -m + 2 \Rightarrow y_2 = \frac{5}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu với mọi m.

Gọi $A\left(-m-2; -\frac{3}{2}\right), B\left(-m+2; \frac{5}{2}\right)$ là các điểm cực trị

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$.

2. Khảo sát hàm số khi m = 0

$$\text{Khi } m = 0, \text{ ta có: } y = \frac{x^2 + x + 4}{2x} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$$

• Miền xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\bullet \quad y' = \frac{x^2 - 4}{2x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = 2 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

• Giới hạn và tiệm cận : $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ là tiệm cận xiên}$$

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
y'	+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\infty$		$+\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$

- Điểm đặc biệt : $y = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$
- Đồ thị : hình bên

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có :

$$\begin{aligned} \cos 2x + \cos x(2\operatorname{tg}^2 x - 1) &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos 2x + \cos x \left(\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1 \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos 2x \cos x + 2\sin^2 x - \cos^2 x &= 2\cos x \\ \Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1)\cos x + 2 - 3\cos^2 x &= 2\cos x \\ \Leftrightarrow 2\cos^3 x - 3\cos^2 x - 3\cos x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\cos x + 1)(2\cos^2 x - 5\cos x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 : \text{vô nghiệm} \\ \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + l2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + l2\pi \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là :

$$x = \pi + l2\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải phương trình

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Ta có :

$$\sqrt{15 \cdot 2^{x+1}} + 1 \geq |2^x - 1| + 2^{x+1} \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq |t-1| + 2t \quad (*)$$

- Xét $0 < t < 1$ (a)

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq t+1 \Leftrightarrow 30t+1 \geq (t+1)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 28t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 28$$

(a)

$$\Rightarrow 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < 2^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$$

- Xét $t \geq 1$ (b)

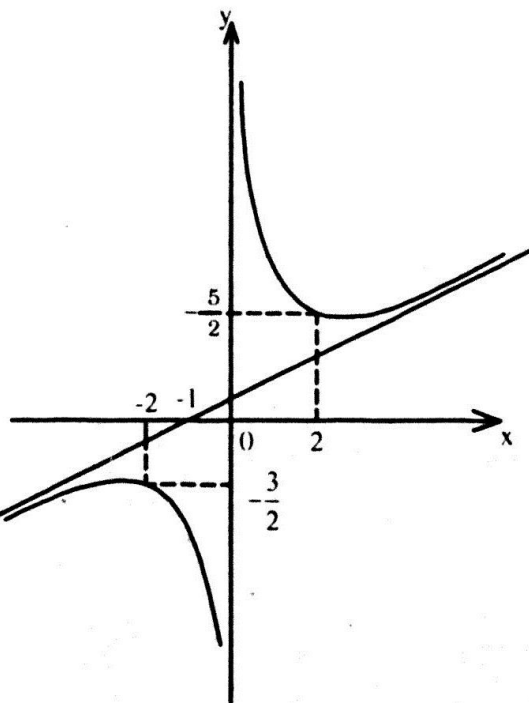
$$(*) \Leftrightarrow \sqrt{30t+1} \geq 3t-1 \Leftrightarrow 30t+1 \geq (3t-1)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 4t \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 4$$

(b)

$$\Rightarrow 1 \leq t \leq 4 \Leftrightarrow 1 \leq 2^x \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

Từ các trường hợp trên, ta có nghiệm của bất phương trình là : $x \leq 2$.



1. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu

- Xác định tâm O

ΔDBC vuông tại D nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của cạnh BC

$\triangle ABC$ cân tại A nên $AI \perp BC$

Ta có:

$$\left\{ \begin{array}{l} (ABC) \perp (BCD) \\ (ABC) \cap (BCD) = BC \Rightarrow AI \perp (BCD) \\ AI \perp BC \end{array} \right.$$

$\Rightarrow AI$ là trục đường tròn ngoại tiếp $\triangle DBC$

Trong mặt phẳng (ABC), kẻ đường trung trực Δ của cạnh AB, Δ cắt AB tại J và cắt AI tại O

Ta có:

$$\begin{cases} O \in \Delta \Rightarrow OA = OB \\ O \in AI \Rightarrow OD = OB = OC \end{cases} \Rightarrow OA = OB = OC = OD$$

$\Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$

- Tính bán kính $R = OA$:

Tứ giác BIOJ nội tiếp được nên ta có:

$$AO.AI = AJ.AB = \frac{1}{2} AB^2, \text{ và } AI = \sqrt{AB^2 - IB^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4a^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow AO = \frac{AB^2}{2AI} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

Vậy $R = OA = \frac{a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

2. a) Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau

d_1 đi qua điểm $A(0; -1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2; 1)$

d_2 đi qua điểm B(0 ; 1 ; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1; -2; 3)$

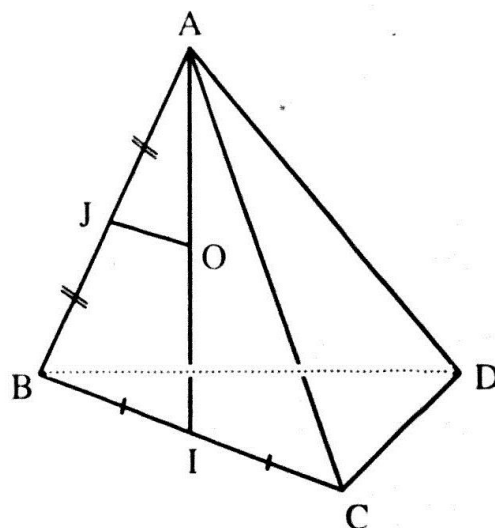
Ta có : $\overrightarrow{AB} = (0; 2; 1)$

$$[\vec{a}, \vec{b}] = (8; -2; -4) \Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overline{AB} = 8 \cdot 0 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = -8 \neq 0$$

$\Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau

Mặt khác : $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1.1 + 2.(-2) + 1.3 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow d_1 \perp d_2$

Vậy d_1 và d_2 chéo nhau đồng thời vuông góc với nhau.



b) Viết phương trình đường thẳng d

Δ có vectơ chỉ phương

$$\vec{c} = (1; 4; -2)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1

và song song với Δ thì (α) qua

A và nhận $\vec{a}, \vec{c}$ làm cặp

vectơ chỉ phương

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} (x-0) + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} (y+1) + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} (z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 3(y+1) + 2z = 0 \Leftrightarrow 8x - 3y - 2z - 3 = 0$$

Gọi (β) là mặt phẳng chứa d_2 và song song với Δ thì (β) qua B và nhận $\vec{b}, \vec{c}$ làm cặp vectơ chỉ phương. Phương trình mặt phẳng (β) có dạng:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} (y-1) + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8x + 5(y-1) + 6(z-1) = 0 \Leftrightarrow 8x - 5y - 6z + 11 = 0$$

$$d = (\alpha) \cap (\beta) \text{ nên } d \text{ có phương trình: } d: \begin{cases} 8x - 3y - 2z - 3 = 0 \\ 8x - 5y - 6z + 11 = 0 \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} \vec{c} \neq k\vec{a} \\ \vec{c} \neq l\vec{b} \end{cases} \Rightarrow (d) \text{ cắt } d_1 \text{ và } d_2.$

Câu IV.

1. Tìm số tự nhiên

Đặt $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Gọi số cần tìm là: $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ ($a_1 \neq 0$)

Đặt nhóm hai chữ số 2, 3 là a .

- Trước tiên ta tìm các số có 6 chữ số khác nhau thỏa yêu cầu bài toán, trong đó chữ số a_1 có thể bằng 0 hoặc khác 0.

+ Hoán vị $a, 0, 1, 4, 5$: có $5!$ cách

+ Hoán vị hai chữ số 2 và 3 trong nhóm a : có 2 cách

Vậy có: $2.5! = 240$ (số).

- Tiếp theo ta tìm các số có 6 chữ số khác nhau thỏa yêu cầu bài toán, có dạng $\overline{0a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$.

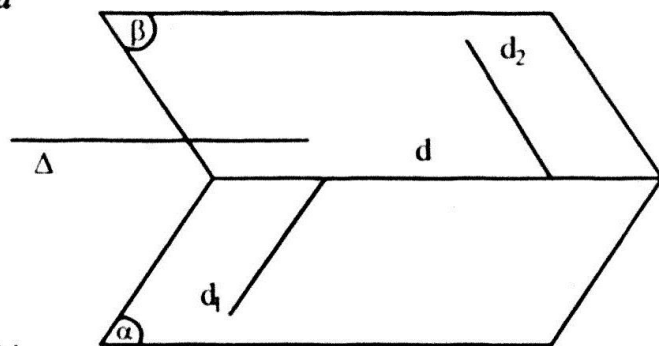
+ Hoán vị $a, 1, 4, 5$: có $4!$ cách

+ Hoán vị hai chữ số 2 và 3 trong nhóm a : có 2 cách

Vậy có: $2.4! = 48$ (số).

Suy ra các số có 6 chữ số khác nhau trong hai chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau là:

$$240 - 48 = 192 \text{ (số).}$$



2. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1-t^2 \\ xdx = -tdt \end{cases}$$

Đối cận:

x	0	1
t	1	0

$$I = - \int_1^0 (1-t^2) t^2 dt = \int_0^1 (-t^4 + t^2) dt = \left(-\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_0^1 \Rightarrow I = \frac{2}{15}.$$

Câu V. Tính các góc của ΔABC

$$\text{Xét: } \begin{cases} 4p(p-a) \leq bc \\ \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{8} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } 4p(p-a) \leq bc \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \leq bc$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(b+c-a) \leq bc \Leftrightarrow (b+c)^2 - a^2 \leq bc$$

$$\Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 \leq -bc \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos A \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A}{2} \geq \frac{3}{4} \Rightarrow \sin \frac{A}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \sin \frac{A}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \sin \frac{A}{2} \left(1 - \sin \frac{A}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \sin^2 \frac{A}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} - \left(\sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{2\sqrt{3}-3}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 120^\circ \\ B = C = 30^\circ \end{cases}$$

ĐỀ SỐ 15

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 3, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = (x-1)(x^2 + mx + m)$ (1) (m là tham số)

1. Tìm m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.
2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 4$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình : $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$.
2. Tìm m để phương trình : $4(\log \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho đường thẳng $d: x - 7y + 10 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: 2x + y = 0$ và tiếp xúc với đường thẳng d tại điểm $A(4; 2)$.
2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Tìm điểm M thuộc cạnh AA' sao cho mặt phẳng (BD'M) cắt hình lập phương theo một thiết diện có diện tích nhỏ nhất.
3. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz, cho tứ diện OABC với $A(0; 0; a\sqrt{3})$, $B(a; 0; 0)$, $C(0; a\sqrt{3}; 0)$ ($a > 0$). Gọi M là trung điểm BC.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM.

Câu IV. (2 điểm).

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$ trên đoạn $[-1; 1]$.

2. Tính tích phân :
$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

Câu V. (1 điểm).

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số có 6 chữ số và thỏa mãn điều kiện :

Sáu chữ số của mỗi số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị?

GIẢI

Câu I.

1. Tìm m

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và Ox:

$$(x-1)(x^2 + mx + m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ g(x) = x^2 + mx + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 4m > 0 \\ g(1) = 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > 4 \\ m \neq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

2. Khảo sát hàm số khi $m = 4$

Khi $m = 4$, ta có: $y = (x-1)(x^2 + 4x + 4) = x^3 + 3x^2 - 4$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 + 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		0		-4	$+\infty$

- Tính lồi lõm và điểm uốn:

$$y'' = 6x + 6$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$$

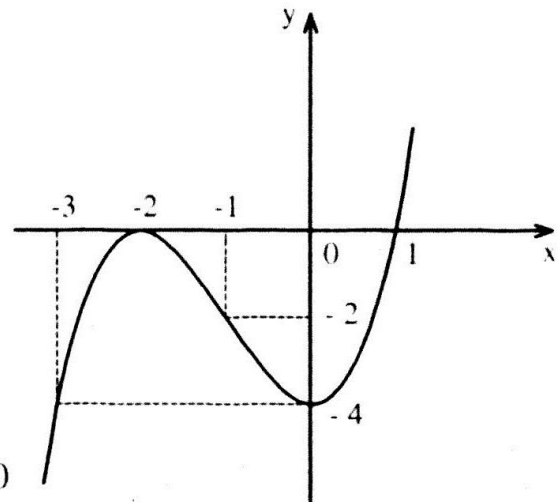
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lồi	Đ.U I(-1; -2)	lõm

- Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = -4$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -2; x = 1$$

- Đồ thị



Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có : $3\cos 4x - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow 3(2\cos^2 2x - 1) - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1\right] - 8\cos^6 x + 2\cos^2 x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^6 x - 12\cos^4 x + 11\cos^2 x - 3 = 0$$

Đặt $t = \cos^2 x$, $0 \leq t \leq 1$

Ta được : $4t^3 - 12t^2 + 11t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2 - 8t + 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} & (\text{loại}) \\ t = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos^2 x - 1 = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm phương trình là : $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = l\pi (k \in \mathbb{Z})$.

2. Tìm m

Ta có : $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0 \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Ta có : $0 < x < 1 \Rightarrow -\infty < \log_2 x < 0 \Rightarrow t < 0$

Ta được : $t^2 + t + m = 0, t < 0 \Leftrightarrow -t^2 - t = m$.

Xét hàm số : $f(t) = -t^2 - t, t < 0$

$$f'(t) = -2t - 1$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow 0$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}$.

Câu III.

1. Viết phương trình đường tròn

Gọi I, R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C)

Ta có : $I \in \Delta \Rightarrow I(t; -2t) \Rightarrow \overline{IA} = (4-t; 2+2t)$

d tiếp xúc (C) tại A $\Leftrightarrow d(I, d) = IA$

$$\Leftrightarrow \frac{|t+14t+10|}{5\sqrt{2}} = \sqrt{(4-t)^2 + (2+2t)^2}$$

$$\Leftrightarrow |3t+2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5t^2+20} \Leftrightarrow (3t+2)^2 = 2(5t^2+20)$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t + 36 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow I(6; -12)$$

$$\Rightarrow R = IA = 10\sqrt{2}$$

Phương trình đường tròn (C) : $(x-6)^2 + (y+12)^2 = 200$.

2. Tìm tọa độ điểm M

Giả sử hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là a

Chọn hệ tọa độ Đêcác vuông góc Oxyz như hình vẽ, ta có : A'(0; 0; 0), D'(0; a; 0), A(0; 0; a), B(a; 0; a).

Gọi $N = CC' \cap (MBD')$, ta có :

$$\begin{cases} BM \parallel ND' \\ BN \parallel MD' \end{cases} \Rightarrow \text{Tứ giác MBND' là hình bình hành}$$

Đặt $M(0; 0; m) \in AA' \ (0 \leq m \leq a)$

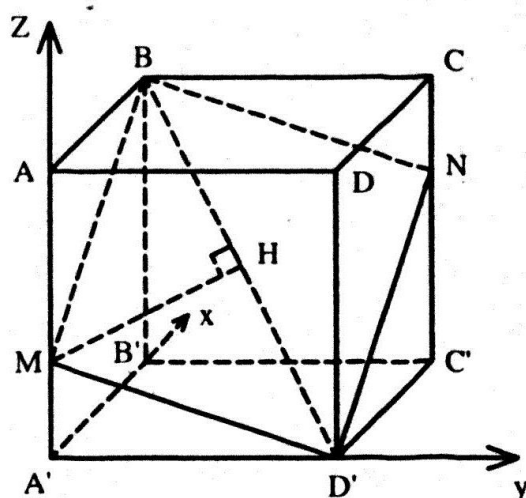
Ta có : $\overline{MB} = (a; 0; a-m), \overline{MD'} = (0; a; -m)$

$$\Rightarrow [\overline{MB}, \overline{MD'}] = (am - a^2; am; a^2)$$

Diện tích hình bình hành MBND' là :

$$S = \left| [\overline{MB}, \overline{MD'}] \right| = \sqrt{(am - a^2)^2 + a^2m^2 + a^4}$$

$$= a\sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 - am + a^2}$$



$$= a\sqrt{2} \cdot \sqrt{\left(m - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}} \geq \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Min} S = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}, \text{ đạt được khi } m = \frac{a}{2}$$

Vậy $M\left(0; 0; \frac{a}{2}\right)$: là trung điểm của AA' .

3. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM

M là trung điểm $BC \Rightarrow M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

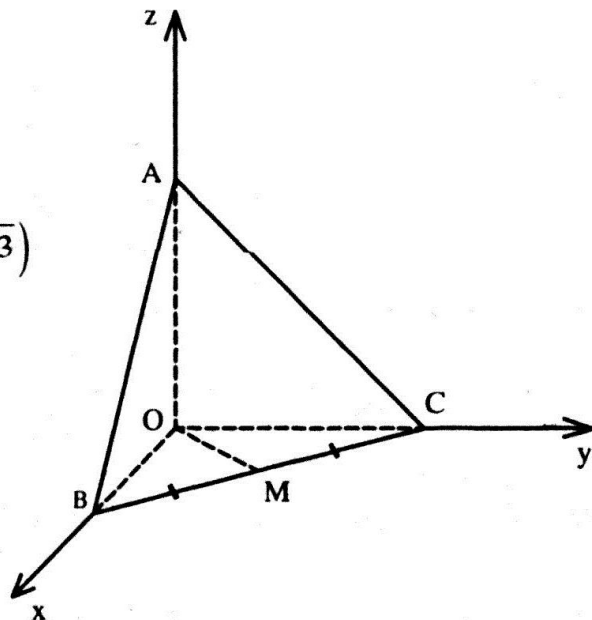
Ta có : $\overrightarrow{AB} = a(1; 0; -\sqrt{3}) = a \cdot \vec{u}$,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{a}{2}(1; \sqrt{3}; 0) = \frac{a}{2} \cdot \vec{v},$$

$$\overrightarrow{OA} = (0; 0; a\sqrt{3}) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] = (3; -\sqrt{3}; \sqrt{3})$$

Khoảng cách giữa AB và OM là:

$$d(AB, OM) = \frac{|[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \overrightarrow{OA}|}{|[\vec{u}, \vec{v}]|} = \frac{3a}{\sqrt{9+3+3}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$



Câu IV.

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = x^6 + 4(1 - x^2)^3$$

Đặt $t = x^2$. Ta có : $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$

$$y = t^3 + 4(1 - t)^3. \quad y = -3t^3 + 12t^2 - 12t + 4, \quad t \in [0; 1]$$

$$y' = -9t^2 + 24t - 12. \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{9} \\ t = 2 \notin [0; 1] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{2}{3}$	1
y'		- 0 +	
y	4	$\frac{4}{9}$	1

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$$\text{Max}_y = \text{Max}_y = 4, \text{ khi } t = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$x \in [-1, 1] \quad t \in [0, 1]$$

$$\text{Min}_y = \text{Min}_y = \frac{4}{9}, \text{ khi } t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$x \in [-1, 1] \quad t \in [0, 1]$$

2. Tính tích phân

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}. \text{ Đặt } t = \sqrt{e^x - 1} \Rightarrow t^2 = e^x - 1 \Rightarrow \begin{cases} e^x = t^2 + 1 \\ e^x dx = 2t dt \end{cases}$$

Đổi cận:

x	ln2	ln5
t	1	2

$$I = \int_1^2 \frac{(t^2 + 1) 2t dt}{t} = 2 \int_1^2 (t^2 + 1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} + t \right) \Big|_1^2 = \frac{20}{3}.$$

Câu V. Tìm số

Đặt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6}$ ($a_1 \neq 0$)

Theo đề bài ta có:

$$\begin{cases} (a_1 + a_2 + a_3) + 1 = a_4 + a_5 + a_6 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 10 \\ a_4 + a_5 + a_6 = 11 \end{cases}$$

Đặt $X = \{a_1, a_2, a_3\}$ và $Y = \{a_4, a_5, a_6\}$

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $X = \{1, 3, 6\}, Y = \{2, 4, 5\}$

- Hoán vị 3 phần tử thuộc X: có 3! cách.

- Hoán vị 3 phần tử thuộc Y: có 3! cách.

Trường hợp này có: $3! \cdot 3! = 36$ (số).

Trường hợp 2. $X = \{1, 4, 5\}, Y = \{2, 3, 6\}$

Tương tự, có: $3! \cdot 3! = 36$ (số).

Trường hợp 3. $X = \{2, 3, 5\}, Y = \{1, 4, 6\}$

Có: $3! \cdot 3! = 36$ (số).

Vậy các số thỏa yêu cầu bài toán là: $3 \cdot 36 = 108$ (số).

ĐỀ SỐ 16

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 4, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số: $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).
2. Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\frac{(2-\sqrt{3})\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1.$
2. Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} x + 2\log_{\frac{1}{4}}(x-1) + \log_2 6 \leq 0.$

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$, M(-2; 3), N(5; n). Viết phương trình các đường thẳng d_1, d_2 qua M và tiếp xúc với (E). Tìm n để trong số các tiếp tuyến của (E) đi qua N có một tiếp tuyến song song với d_1 hoặc d_2 .
2. Cho hình chóp đều S.ABC, đáy ABC có cạnh bằng a, mặt bên tạo với đáy một góc bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính thể tích khối chóp S.ABC và khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC).
3. Trong không gian cho hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxyz, cho hai điểm I(0; 0; 1), K(3; 0; 0). Viết phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm I, K và tạo với mặt phẳng (xOy) một góc bằng 30° .

Câu IV. (2 điểm).

1. Từ một tổ gồm 7 học sinh nữ và 5 học sinh nam cần chọn ra 6 em trong đó số học sinh nữ phải nhỏ hơn 4. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?
2. Cho hàm số: $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$,

Tìm a và b biết rằng: $f'(0) = -22$ và $\int_0^1 f(x) dx = 5$.

Câu V. (1 điểm).

Chứng minh rằng: $e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R}.$

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{2x-1}{x-1}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$

- Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	2		$+\infty$		2

- Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

- Đồ thị : hình bên

2. **Tìm tọa độ điểm M**

Đặt $M(x_0; y_0) \in (C)$

$$\Leftrightarrow y_0 = \frac{2x_0-1}{x_0-1} \quad (x_0 \neq 1)$$

Tiếp tuyến Δ tại M có hệ số góc:

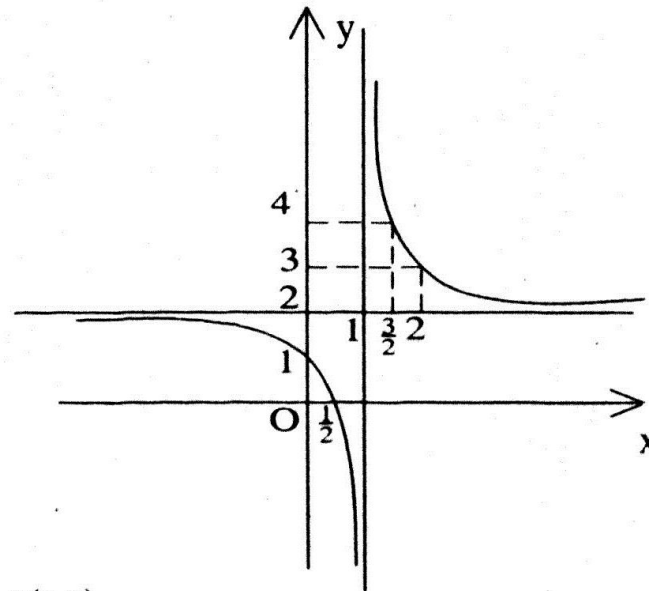
$$k_1 = y'(x_0) = \frac{-1}{(x_0-1)^2}$$

I là giao điểm hai đường tiệm cận $\Rightarrow I(1; 2)$

$$\Rightarrow \overline{IM} = \left(x_0 - 1; \frac{1}{x_0 - 1} \right) = (a_1; a_2)$$

Đường thẳng IM có hệ số góc : $k_2 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{(x_0 - 1)^2}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$



$$\Leftrightarrow \frac{-1}{(x_0-1)^2} \cdot \frac{1}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow (x_0-1)^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-1=1 \\ x_0-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=2 \Rightarrow y_0=3 \\ x_0=0 \Rightarrow y_0=1 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm: $M_1(2;3), M_2(0;1)$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $\cos x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có:
$$\frac{(2-\sqrt{3})\cos x - 2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x - 1} = 1$$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})\cos x - \left[1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2\cos x - 1$$

$$\Leftrightarrow (2-\sqrt{3})\cos x - (1 - \sin x) = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3}\cos x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm phương trình: $x = \frac{4\pi}{3} + m2\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$.

2. Giải bất phương trình

Điều kiện: $x > 1$.

Ta có:
$$\log_{\frac{1}{2}} x + 2\log_{\frac{1}{4}}(x-1) + \log_2 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\log_2 x - \log_2(x-1) + \log_2 6 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2(x-1) \geq \log_2 6$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [x(x-1)] \geq \log_2 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2 \vee x \geq 3$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình: $x \geq 3$.

Câu III.

1. Viết phương trình tiếp qua M

Phương trình đường thẳng d qua M có dạng:

$$A(x+2) + B(y-3) = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + 2A - 3B = 0$$

$$d \text{ tiếp xúc (E)} \Leftrightarrow A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$$

$$\Leftrightarrow 4A^2 + B^2 = (2A - 3B)^2$$

$$\Leftrightarrow 2B^2 - 3AB = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} B=0 & : \text{chọn } A=1 \\ B=\frac{3}{2}A & : \text{chọn } A=2, B=3 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là :

$$d_1: x+2=0$$

$$d_2: 2x+3y-5=0.$$

• Tìm n

Nhận xét: Không có đường thẳng nào đi qua điểm N và song song với d_1 là tiếp tuyến của (E). Do đó, tiếp tuyến của (E) đi qua điểm N chỉ có thể song song với d_2 .

Gọi Δ là tiếp tuyến qua N và song song với d_2

Phương trình đường thẳng Δ có dạng : $2x+3y+C=0$ ($C \neq -5$)

$$\Delta \text{ tiếp xúc với (E)} \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \Leftrightarrow 16+9=C^2 \Leftrightarrow C^2=25$$

$$\Leftrightarrow C=5 \text{ (do } C \neq -5) \Rightarrow \Delta: 2x+3y+5=0$$

$$N \in \Delta \Leftrightarrow 10+3n+5=0 \Leftrightarrow n=-5$$

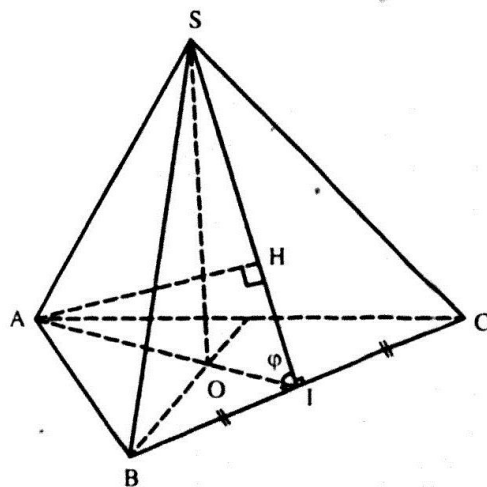
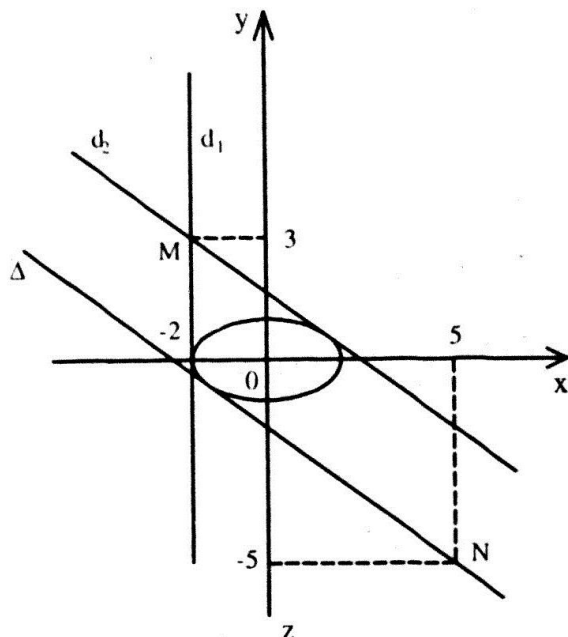
Vậy giá trị cần tìm là : $n=-5$.

2. Tính thể tích khối chóp S.ABC

Gọi I là trung điểm của BC, ta có:

$$\begin{cases} SI \perp BC \text{ (do } \triangle SBC \text{ cân tại S)} \\ AI \perp BC \text{ (} \triangle ABC \text{ đều)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{SIA} = \varphi$$

Gọi O là tâm của $\triangle ABC$. Do S.ABC là hình chóp đều nên SO là chiều cao của hình chóp



$$\triangle SOI \text{ vuông tại O cho : } SO = OI \cdot \tan \varphi = \frac{1}{3} AI \cdot \tan \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \varphi, \text{ với } AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Thể tích khối chóp S.ABC là:

$$V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \tan \varphi \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{24} \tan \varphi \text{ (đvtt)}.$$

• Tính khoảng cách từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAI) \perp (SBC)$ theo giao tuyến SI

Trong mặt phẳng (SAI), từ A kẻ $AH \perp SI$ tại H thì $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow AH$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

$$\Delta AHI \text{ vuông tại H cho: } AH = AI \sin \varphi = \frac{a\sqrt{3}}{2} \sin \varphi.$$

3. Viết phương trình mặt phẳng

Gọi mặt phẳng cần tìm là: $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

Ta có: $I \in (\alpha) \Rightarrow C + D = 0 \quad (1)$

$$K \in (\alpha) \Rightarrow 3A + D = 0 \quad (2)$$

(α) và (xOy) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (A; B; C)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$

(α) tạo với (xOy) một góc bằng 30° nên ta có:

$$\cos 30^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| |\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4C^2 = 3(A^2 + B^2 + C^2) \Leftrightarrow 3A^2 + 3B^2 - C^2 = 0 \quad (3)$$

Từ (1) và (2), ta có: $C = 3A$, $D = -3A$. Thế $C = 3A$ vào (3), ta được:

$$\Leftrightarrow 3A^2 + 3B^2 - 9A^2 = 0 \Leftrightarrow B^2 = 2A^2$$

$$\Leftrightarrow B = \pm \sqrt{2}A: \text{ chọn } A = 1, B = \pm \sqrt{2} \Rightarrow C = 3, D = -3$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là: $x + \sqrt{2}y + 3z - 3 = 0$; $x - \sqrt{2}y + 3z - 3 = 0$.

Cách khác:

Đường thẳng IK nhận $\vec{IK} = (3; 0; -1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình:

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. (α) chứa đường thẳng IK nên có phương trình:

$$m(x + 3z - 3) + ny = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0) \Leftrightarrow mx + ny + 3mz - 3m = 0$$

(α) và (xOy) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (m; n; 3m)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$

(α) tạo với (xOy) một góc bằng 30° nên ta có:

$$\cos 30^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| |\vec{k}|} \Leftrightarrow \frac{3|m|}{\sqrt{10m^2 + n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 12m^2 = 10m^2 + n^2$$

$$\Leftrightarrow n^2 = 2m^2 \Leftrightarrow n = \pm \sqrt{2}m: \text{ chọn } m = 1, n = \pm \sqrt{2}$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là: $x + \sqrt{2}y + 3z - 3 = 0$; $x - \sqrt{2}y + 3z - 3 = 0$.

Câu IV.

1. Tìm số cách chọn

Trường hợp 1. Chọn 1 học sinh nữ và 5 học sinh nam

– Chọn 1 học sinh nữ: có 7 cách

– Chọn 5 học sinh nam: có 1 cách

Trường hợp này có: $7 \cdot 1 = 7$ (cách).

Trường hợp 2. Chọn 2 học sinh nữ và 4 học sinh nam: Có $C_7^2 \cdot C_5^4 = 105$ (cách).

Trường hợp 3. Chọn 3 học sinh nữ và 3 học sinh nam: Có $C_7^3 \cdot C_5^3 = 350$ (cách).

Vậy có tất cả: $7 + 105 + 350 = 462$ (cách).

2. Tìm a, b . $f(x) = \frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x$

Ta có:

$$\bullet \quad f'(x) = \frac{-3a}{(x+1)^4} + b(x+1)e^x \Rightarrow f'(0) = -22 \Leftrightarrow -3a + b = -22 \quad (1)$$

$$\bullet \quad I = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left[\frac{a}{(x+1)^3} + bxe^x \right] dx = \int_0^1 \frac{a}{(x+1)^3} dx + \int_0^1 bxe^x dx$$
$$= \frac{-a}{2(x+1)^2} \Big|_0^1 + \int_0^1 bx e^x dx = \frac{3a}{8} + I_1$$

Tính $I_1 = \int_0^1 bx e^x dx$. Đặt: $\begin{cases} u = bx \Rightarrow du = b dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$$I = bxe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 be^x dx = be - be^x \Big|_0^1 = b$$

$$\Rightarrow I = \frac{3a}{8} + b \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = 5 \Leftrightarrow \frac{3a}{8} + b = 5 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $a = 8, b = 2$.

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Ta có: $e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow (e^x - 1 - x) + \left(\cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \right) \geq 0, \forall x \in R$$

Trước hết ta chứng minh: $e^x - x - 1 \geq 0, \forall x \in R \quad (1)$

$$\frac{x^2}{2} + \cos x - 1 \geq 0, \forall x \in R \quad (2)$$

Chứng minh (1): Xét hàm số: $f(x) = e^x - x - 1, x \in R$

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$\Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy (1) được chứng minh.

Chứng minh (2): Xét hàm số: $g(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x - 1, x \in \mathbb{R}$

Ta có: $g(-x) = g(x)$ nên $g(x)$ là hàm số chẵn nên ta chỉ cần xét $x \geq 0$

$$g'(x) = x - \sin x, \quad g''(x) = 1 - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$g''(x)$		+
$g'(x)$	0	

$$\Rightarrow g'(x) \geq g'(0) = 0, \forall x \geq 0$$

Mà $g(-x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \cos x - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}: (2) \text{ được chứng minh.}$$

Từ (1) và (2), ta có: $e^x + \cos x + \frac{x^2}{2} - 2 - x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow e^x + \cos x \geq 2 + x - \frac{x^2}{2}, \forall x \in \mathbb{R} \text{ (đpcm).}$$

ĐỀ SỐ 17

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 5, NĂM 2003

Câu 1. (2 điểm).

Cho hàm số: $y = \frac{x^2 + 5x + m^2 + 6}{x + 3}$ (1) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$.

2. Cho hàm số $f(x) = x \log_x 2$ ($x > 0, x \neq 1$).

Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) \leq 0$.

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(1; 0)$ và hai đường thẳng lần lượt chứa các đường cao vẽ từ B và C có phương trình tương ứng là: $x - 2y + 1 = 0$ và $3x + y - 1 = 0$.

Tính diện tích tam giác ABC.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho mặt phẳng

$$(P): 2x + 2y + z - m^2 - 3m = 0 \quad (m \text{ là tham số})$$

$$\text{và mặt cầu } (S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9.$$

Tìm m để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S). Với m tìm được, hãy xác định tọa độ tiếp điểm của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

3. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là vuông tại B, $AB = a$, $BC = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh rằng tam giác AMB cân tại M và tính diện tích tam giác AMB theo a.

Câu IV. (2 điểm).

1. Từ 9 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau?

2. Tính tích phân: $I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$.

Câu V. (1 điểm).

Tìm các góc A, B, C của ΔABC để biểu thức: $Q = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$ đạt giá trị nhỏ nhất.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có: $y = \frac{x^2 + 5x + 7}{x + 3} = x + 2 + \frac{1}{x + 3}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$
- $y' = \frac{x^2 + 6x + 8}{(x + 3)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \Rightarrow y = -3 \\ x = -2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$
- Giới hạn và tiệm cận :
 $\lim_{x \rightarrow -3} y = \infty \Rightarrow x = -3$ là tiệm cận đứng
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 3} = 0 \Rightarrow y = x + 2$ là tiệm cận xiên
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-4		-3		-2	$+\infty$	
y'		+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$		-3		$+\infty$		1	$+\infty$

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{7}{3}$

- Đồ thị : hình bên

2. Tìm m

$$y' = \frac{x^2 + 6x + 9 - m^2}{(x + 3)^2}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - m^2 \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 \geq m^2, \forall x \in (1; +\infty)$$

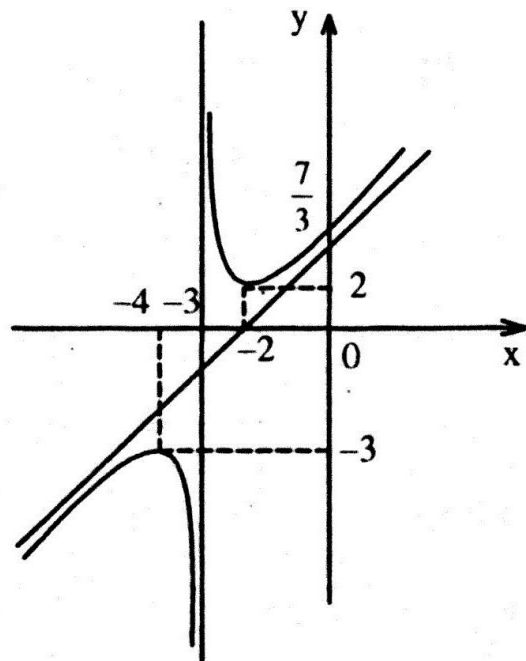
Xét hàm số:

$$f(x) = x^2 + 6x + 9, x \in (1; +\infty)$$

$$f'(x) = 2x + 6 > 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)	16	$+\infty$



Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m^2 \leq 16 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 4$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $\frac{\cos^2 x (\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x)$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x (\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 x)(\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)[(1 - \sin x)(\cos x - 1) - 2(\sin x + \cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)[(1 + \sin x) + \cos x(1 + \sin x)] = 0 \Leftrightarrow (1 + \sin x)^2 (1 + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \\ x = \pi + l2\pi \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$$x = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \vee x = \pi + l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

2. • Tính $f'(x)$

Ta có: $f(x) = x \log_x 2 = \frac{x \ln 2}{\ln x} \quad (x > 0, x \neq 1) \Rightarrow f'(x) = \frac{(\ln x - 1) \ln 2}{\ln^2 x}$

• Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \ln 2 \cdot \frac{(\ln x - 1)}{\ln^2 x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x - 1 \leq 0 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln x \leq 1 \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq e \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq e \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $\begin{cases} 0 < x \leq e \\ x \neq 1 \end{cases}$

Câu III.

1. Tính diện tích tam giác ABC

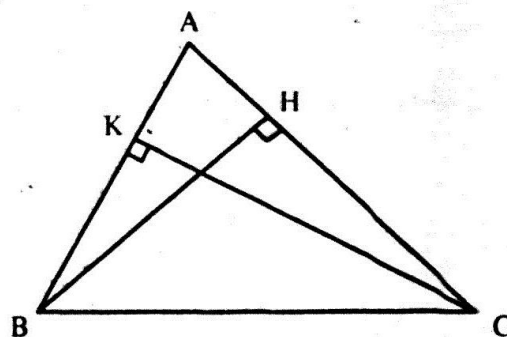
Đặt $BH: x - 2y + 1 = 0$

$CK: 3x + y - 1 = 0$

Ta có: $AB \perp CK$ nên AB có phương trình:

$$x - 3y + C = 0$$

$$A \in AB \Rightarrow C = -1 \Rightarrow AB: x - 3y - 1 = 0$$



Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow B(-5; -2)$$

$AC \perp BH$ nên AC có phương trình: $2x + y + C' = 0$

$A \in AC \Rightarrow C' = -2 \Rightarrow AC: 2x + y - 2 = 0$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ: $\begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ 3x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow C(-1; 4)$

Ta có: $AB = \sqrt{(1+5)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{10}$

$$d(C, AB) = \frac{14}{\sqrt{10}}$$

Diện tích ΔABC là: $S = \frac{1}{2} AB \cdot d(C, AB) = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{14}{\sqrt{10}} = 14$.

2.

• **Tìm m để (P) tiếp xúc với (S):** $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$

(S) có tâm I(1; -1; 1) và bán kính R = 3

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; 1)$

(P) tiếp xúc (S) $\Leftrightarrow d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|m^2 + 3m - 1|}{3} = 3 \Leftrightarrow |m^2 + 3m - 1| = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m - 1 = -9 \\ m^2 + 3m - 1 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 3m + 8 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \\ m^2 + 3m - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -5 \end{cases}$$

Với $m = 2$ hay $m = -5$, ta có: (P): $2x + 2y + z - 10 = 0$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc (P) thì Δ nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ có dạng: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Tham số t tương ứng với giao điểm $M = \Delta \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$2(1+2t) + 2(-1+2t) + 1+t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(3; 1; 2).$$

3. **Chứng minh ΔAMB cân tại M**

ΔSAC vuông tại A có AM là trung tuyến nên:

$$AM = \frac{1}{2} SC \quad (1)$$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \text{ (do } \Delta ABC \text{ vuông tại B)} \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$$

ΔSBC vuông tại B có BM là trung tuyến nên :

$$BM = \frac{1}{2}SC \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $AM = BM$

Vậy ΔAMB cân tại M (đpcm).

• **Tính diện tích tam giác AMB theo a**

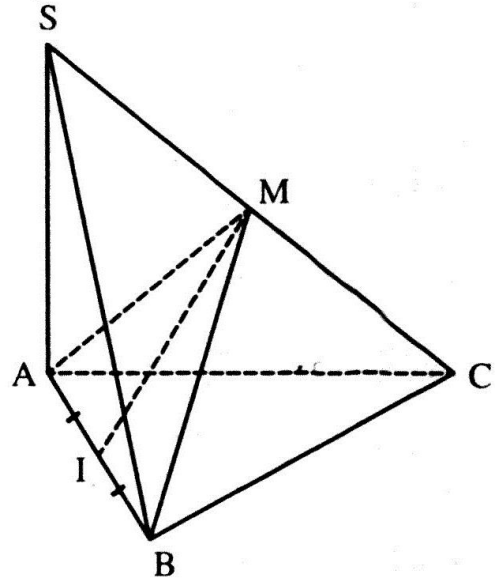
ΔABC vuông tại B, cho:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

ΔSAC vuông tại A cho:

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{4a^2 + 5a^2} = 3a$$

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}SC = \frac{3a}{2}$$



Gọi I là trung điểm của AB thì $MI \perp AB$ (do ΔAMB cân tại M).

$$\Delta AIM \text{ vuông tại I, cho: } IM = \sqrt{AM^2 - AI^2} = \sqrt{\frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Diện tích } \Delta MAB \text{ là: } S = \frac{1}{2}AB.MI = \frac{1}{2}a.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \quad (\text{đvdt}).$$

Câu IV.

1. Tìm số

Đặt $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ ($a_1 \neq 0$)

Trường hợp 1: $a_7 = 0$

Chọn 6 chữ số còn lại thuộc $A \setminus \{0\}$: có A_8^6 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có: $A_8^6 = 20160$ (số).

Trường hợp 2: $a_7 \neq 0$

Chọn $a_7 \in \{2, 4, 6, 8\}$: có 4 cách

Chọn $a_1 \in A \setminus \{0, a_7\}$: có 7 cách

Chọn 5 chữ số còn lại thuộc $A \setminus \{a_1, a_7\}$: có A_7^5 cách

$\Rightarrow$ Trường hợp này có: $4.7.A_7^5 = 70560$ (số).

Vậy có tất cả: $20160 + 70560 = 90720$ (số).

2. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{dt}{2}$$

Đổi cận

x	0	1
t	0	1

$$I = \int_0^1 \frac{1}{2} t e^t dt$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \frac{1}{2}t \Rightarrow du = \frac{1}{2}dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2} t e^t \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^t dt = \frac{e}{2} - \frac{1}{2} e^t \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Câu V. Tính các góc A, B, C

Ta có: $Q = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2A) + \frac{1}{2}(1 - \cos 2B) - \sin^2 C = 1 - \sin^2 C - \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B)$$

$$= \cos^2 C - \cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 C + \cos C \cos(A-B)$$

$$= \left[\cos C + \frac{1}{2} \cos(A-B) \right]^2 - \frac{1}{4} \cos^2(A-B) \geq -\frac{1}{4} \cos^2(A-B) \geq -\frac{1}{4}.$$

$\Rightarrow \min Q = -\frac{1}{4}$, đạt được khi:

$$\begin{cases} \cos^2(A-B) = 1 \\ \cos C + \frac{1}{2} \cos(A-B) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(A-B) = 0 \\ \cos C + \frac{1}{2} \cos(A-B) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos C = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \end{cases}.$$

Vậy: $\Leftrightarrow A = B = 30^\circ, C = 120^\circ$.

ĐỀ SỐ 18

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 6, NĂM 2003

Câu I. (2 điểm).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số: $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
2. Gọi d_k là đường thẳng đi qua điểm $M(0; -1)$ và có hệ số góc bằng k .
Tìm k để đường thẳng d_k cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\cot gx = \operatorname{tg} x + \frac{2 \cos 4x}{\sin 2x}$.
2. Giải phương trình: $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$.

Câu III. (2 điểm).

1. Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz, cho hai điểm $A(2; 1; 1), B(0; -1; 3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$.
 - a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB. Gọi K là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P), chứng minh rằng d vuông góc với IK.
 - b) Viết phương trình tổng quát của hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng có phương trình: $x + y - z + 1 = 0$.
2. Cho tứ diện ABCD có AD vuông góc với mặt phẳng (ABC) và tam giác ABC vuông tại A, $AD = a, AC = b, AB = c$. Tính diện tích S của tam giác BCD theo a, b, c và chứng minh rằng: $2S \geq \sqrt{abc(a + b + c)}$.

Câu IV. (2 điểm).

1. Tìm số tự nhiên n thỏa mãn: $C_n^2 C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$.
(Trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

2. Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} \ln x dx$.

Câu V. (2 điểm).

Xác định dạng của tam giác ABC, biết rằng

$$(p - a) \sin^2 A + (p - b) \sin^2 B = c \sin A \sin B,$$

trong đó $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{a + b + c}{2}$.

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = 2x^3 - 3x^2 - 1$

• Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

• $y' = 6x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-1	-2	$+\infty$	

• Tính lồi, lõm và điểm uốn: $y'' = 12x - 6$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lõm	Đ.U	lồi
		$I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$	

• Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = -1$

• Đồ thị:

2. Tìm k

Phương trình đường thẳng d_k qua M

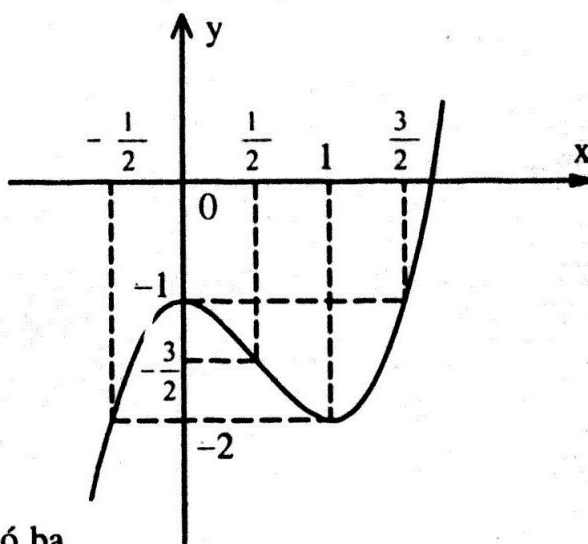
với hệ số góc k có dạng: $y = kx - 1$

Phương trình hoành độ giao điểm của d_k và (C): $2x^3 - 3x^2 - 1 = kx - 1$

$$\Leftrightarrow x(2x^2 - 3x - k) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 2x^2 - 3x - k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 + 8k > 0 \\ g(0) = -k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq -\frac{9}{8} \\ k \neq 0 \end{cases}$$

Câu II.

1. Giải phương trình.

Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $\cot gx = \frac{2\cos 4x}{\sin 2x} \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos 4x}{\sin x \cos x}$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x = \sin^2 x + \cos 4x \Leftrightarrow (2\cos^2 2x - 1) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 & (\text{loại, do } \sin 2x \neq 0 \Rightarrow \cos 2x \neq 1) \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + l2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \pm \frac{\pi}{3} + l\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$.

2. Giải phương trình

Điều kiện: $5^x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > \log_5 4$

Ta có: $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$

$$\Leftrightarrow 5^x - 4 = 5^{1-x} \Leftrightarrow 5^x - 4 = \frac{5}{5^x} \Leftrightarrow 5^{2x} - 4.5^x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x = -1 & (\text{loại}) \\ 5^x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = 1$.

Câu III.

1. a)

• Viết phương trình mặt phẳng (P)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = -2(1; 1; -1)$

I là trung điểm AB $\Rightarrow I(1; 0; 2)$

(P) qua I và vuông góc với AB nên nhận $\vec{n} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 1; -1)$ làm vectơ pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$1.(x-1) + 1.(y-0) - 1.(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$$

Chứng minh d vuông góc với IK

$K = d \cap (P)$ nên tọa độ của K là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 11 = 0 \\ y + 3z - 8 = 0 \\ x + y - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow K(3; -1; 3) \Rightarrow \overline{IK} = (2; -1; 1)$$

có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3; -1)$

ta có: $\vec{a} \cdot \overline{IK} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = 0 \Rightarrow d \perp IK$ (đpcm).

) Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d

theo câu 1), ta có: $(P): x + y - z + 1 = 0$

Mặt (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với (P) thì phương trình của (Q) có dạng: $m(3x - 2y - 11) + n(y + 3z - 8) = 0$ ($m^2 + n^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow 3mx + (n - 2m)y + 3nz - 11m - 8n = 0$$

(Q) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}' = (3m; n - 2m; 3n)$

$$(Q) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow 3m + n - 2m - 3n = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{m}{2}: \text{chọn } m = 2, n = 1 \Rightarrow (Q): 2x - y + z - 10 = 0.$$

Mặt Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (P) thì $\Delta = (P) \cap (Q)$

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ có dạng: } \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ 2x - y + z - 10 = 0 \end{cases}$$

2. Tính diện tích tam giác BCD

Trong $\triangle ABC$ kẻ đường cao AI , ta có:

$$\begin{cases} BC \perp AD \text{ (do } AD \perp (ABC)) \\ BC \perp AI \end{cases}$$

$$\Rightarrow BC \perp (ADI) \Rightarrow BC \perp DI$$

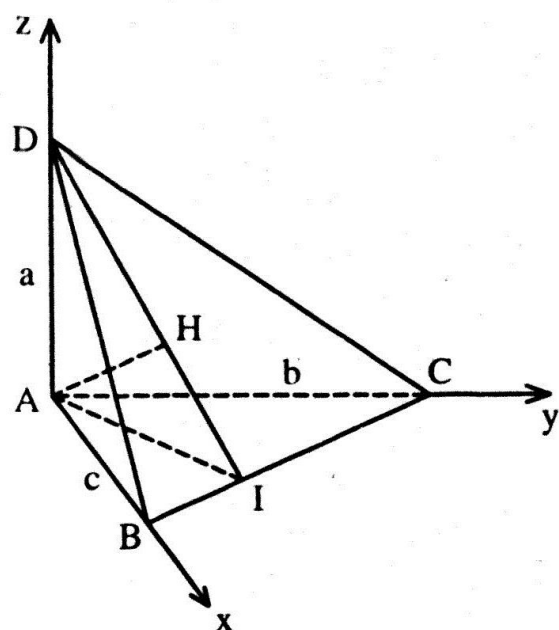
$\triangle ABC$ vuông tại A cho:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\Rightarrow AI^2 = \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}$$

$\triangle ADI$ vuông tại A cho:



$$DI = \sqrt{AD^2 + AI^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2}}$$

Diện tích tam giác BCD là:

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot DI = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{b^2 + c^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

Cách khác

Chọn hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz như hình vẽ, ta có:

$$A(0;0;0), B(c;0;0), C(0;b;0), D(0;0;a)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BC} = (-c; b; 0), \overrightarrow{BD} = (-c; 0; a) \Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = (ab; ac; bc)$$

$$\text{Diện tích tam giác BCD là: } S = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}.$$

• **Chứng minh:** $2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 \geq 2ab^2 c \quad (1)$$

$$b^2 c^2 + c^2 a^2 \geq 2abc^2 \quad (2)$$

$$a^2 c^2 + a^2 b^2 \geq 2a^2 bc \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có: $a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 \geq ab^2 c + abc^2 + a^2 bc$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow 2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)} \quad (\text{đpcm}).$$

Cách khác:

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$abc(a+b+c) = ab \cdot ac + bc \cdot ab + ca \cdot bc \leq \sqrt{(a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2)^2} = a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{abc(a+b+c)} \leq \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2} \Leftrightarrow 2S \geq \sqrt{abc(a+b+c)} \quad (\text{đpcm}).$$

Câu IV.

1. Tìm $n \in \mathbb{N}$

$$\text{Ta có: } C_n^{n-2} = C_n^2 \text{ và } C_n^{n-3} = C_n^3$$

$$\text{Do đó: } C_n^2 \cdot C_n^{n-2} + 2C_n^2 C_n^3 + C_n^3 C_n^{n-3} = 100$$

$$\Leftrightarrow (C_n^2)^2 + 2C_n^2 C_n^3 + (C_n^3)^2 = 100 \Leftrightarrow (C_n^2 + C_n^3)^2 = 100 \Leftrightarrow C_n^2 + C_n^3 = 10$$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} + \frac{n!}{3!(n-3)!} = 10 \Leftrightarrow 3(n-1)n + (n-2)(n-1)n = 60$$

$$\Leftrightarrow n^3 - n - 60 = 0 \Leftrightarrow (n-4)(n^2 + 4n + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ n^2 + 4n + 15 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $n = 4$.

2. Tính tích phân

$$\text{Ta có: } I = \int_1^e \frac{x^2 + 1}{x} \ln x dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx = \int_1^e x \ln x dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = I_1 + I_2$$

$$\bullet \text{ Tính } I_1 = \int_1^e x \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 + 1)$$

$$\bullet \text{ Tính } I_2 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$I_2 = \int_1^e \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big|_1^e = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } I = \frac{1}{4} (e^2 + 1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (e^2 + 3).$$

Câu V. Xác định dạng của tam giác ABC

$$\text{Ta có: } (p - a) \sin^2 A + (p - b) \sin^2 B = C \sin A \sin B$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \cdot \frac{a^2}{4R^2} + \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \cdot \frac{b^2}{4R^2} = \frac{abc}{4R^2}$$

$$\Leftrightarrow (b+c-a)a^2 + (a+c-b)b^2 = 2abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b + a^2c - a^3 + ab^2 + b^2c - b^3 = 2abc$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - a^2b) + (b^3 - ab^2) + (abc - b^2c) + (abc - a^2c) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b) - b^2(a-b) + bc(a-b) - ac(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2 + bc - ac) = 0 \Leftrightarrow (a-b)[a^2 - b^2 - c(a-b)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a+b = c \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow a = b$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \text{ cân tại } C.$$

ĐỀ SỐ 19

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI A, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$ (1).

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Tìm m để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số (1) tại hai điểm A, B sao cho $AB = 1$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải bất phương trình $\frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$.
2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(0; 2) và B($-\sqrt{3}$; -1).
Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; $2\sqrt{2}$). Gọi M là trung điểm của cạnh SC.
 - a) Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.
 - b) Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.ABMN.

Câu IV. (2 điểm).

1. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$
2. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của $[1 + x^2(1-x)]^8$.

Câu V. (1 điểm).

Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện: $\cos 2A + 2\sqrt{2} \cos B + 2\sqrt{2} \cos C = 3$
Tính ba góc của tam giác ABC.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $y' = \frac{-x^2 + 2x}{2(x-1)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2} \\ x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

- Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 1 - \frac{4}{2(x-1)} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2(x-1)} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 \text{ là đường tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'		- 0 +		+ 0 -	
y	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

- Đồ thị: hình bên

2. Tìm m

Đặt (C): $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)}$

và (d): $y = m$

Phương trình hoành độ giao điểm của

(C) và (d): $\frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x-1)} = m$

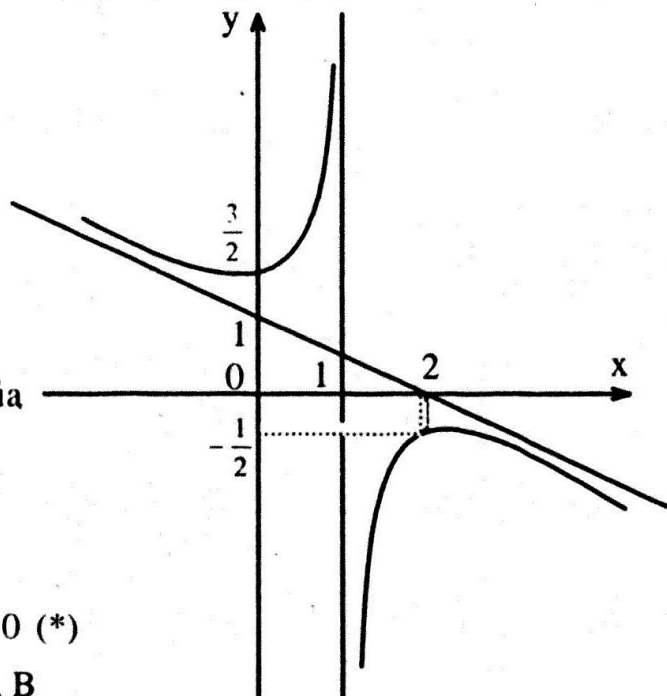
$$\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 3 = 2m(x-1) \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + (2m-3)x - 2m+3 = 0 \quad (*)$$

(d) cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B

$\Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-3)^2 - 4(-2m+3) > 0 \\ g(1) = 1 \neq 0, \forall m \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{2} \vee m > \frac{3}{2} \quad (a)$$

Đặt $A(x_1; m), B(x_2; m)$ thì x_1, x_2 là nghiệm của (*)

Theo định lí Vi-et, ta có : $x_1 + x_2 = 3 - 2m, x_1 \cdot x_2 = 3 - 2m$

$$\text{Ta có: } AB = 1 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 1 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (3 - 2m)^2 - 4(3 - 2m) = 1 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (\text{thỏa}(a))$$

$$\text{Vậy giá trị cần tìm là : } m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Câu II.

1. Giải bất phương trình

Điều kiện: $x \geq 4$

$$\text{Ta có: } \frac{\sqrt{2(x^2 - 16)}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \frac{7 - x}{\sqrt{x - 3}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} + x - 3 > 7 - x \Leftrightarrow \sqrt{2(x^2 - 16)} > 10 - 2x$$

$$\Leftrightarrow 10 - 2x < 0 \vee \begin{cases} 10 - 2x \geq 0 \\ 2(x^2 - 16) > (10 - 2x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 5 \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 5 \vee \begin{cases} x \leq 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x < 10 + \sqrt{34} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 5 \vee 10 - \sqrt{34} < x \leq 5 \Leftrightarrow x > 10 - \sqrt{34}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình: $x > 10 - \sqrt{34}$.

2. Giải hệ phương trình

$$\text{Xét: } \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y - x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $y > 0, y > x$

$$(1) \Leftrightarrow -\log_4(y - x) + \log_4 y = 1 \Leftrightarrow \log_4 y = 1 + \log_4(y - x)$$

$$\Leftrightarrow \log_4 y = \log_4 [4(y - x)] \Leftrightarrow y = 4(y - x) \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x \quad (3)$$

$$\text{Thế (3) vào (2), ta có : } x^2 + \left(\frac{4}{3}x\right)^2 = 25 \Leftrightarrow x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -4 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$.

Câu III.

1.

- **Tìm tọa độ trực tâm ΔOAB**

Gọi $H(x; y)$ là trực tâm ΔOAB , ta có: $\overrightarrow{AH} = (x; y - 2)$, $\overrightarrow{BH} = (x + \sqrt{3}; y + 1)$,
 $\overrightarrow{OA} = (0; 2)$, $\overrightarrow{OB} = (-\sqrt{3}; -1)$

Mặt khác:

$$\begin{cases} AH \perp OB \\ BH \perp OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}x - y + 2 = 0 \\ 2(y + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow H(\sqrt{3}; -1).$$

- **Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB**

Gọi $I(a; b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔOAB , ta có: $IA = IB = IO$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IO^2 \\ IB^2 = IO^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (b - 2)^2 = a^2 + b^2 \\ (a + \sqrt{3})^2 + (b + 1)^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-\sqrt{3}; 1).$$

2. Tính góc giữa hai đường thẳng SA, BM

Tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên O là trung điểm AC và BD

$$\Rightarrow C(-2; 0; 0), D(0; -1; 0)$$

M là trung điểm của SC nên $M(-1; 0; \sqrt{2})$

Ta có: $\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$

Gọi φ là góc hợp bởi SA và BM , ta có:

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BM}|}{|\overrightarrow{SA}| |\overrightarrow{BM}|} = \frac{|-2 - 4|}{\sqrt{4 + 0 + 8} \cdot \sqrt{1 + 1 + 2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ.$$

- **Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM**

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 1; 0)$

$$[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}] = (-2\sqrt{2}; 0; -2)$$

Khoảng cách giữa SA và BM là:

$$d(SA, BM) = \frac{|\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BM}|} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{8+0+4}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

b) Tính thể tích khối chóp S.ABMN

Ta có: $\begin{cases} AB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow AB \parallel (SCD)$

Mà $AB \subset (ABM)$

$\Rightarrow (ABM) \cap (SCD)$

$= MN \parallel AB \parallel CD \quad (N \in SD)$

M là trung điểm SC nên

N là trung điểm SD

$$\Rightarrow N\left(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$$

Ta có: $\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2})$

$$\overrightarrow{SM} = (-1; 0; -2\sqrt{2}), \quad \overrightarrow{SN} = \left(0; -\frac{1}{2}; -\sqrt{2}\right)$$

$$[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] = (2\sqrt{2}; 4\sqrt{2}; 2), \quad [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}] = (-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 1).$$

Thể tích khối tứ diện SABN là:

$$V_{SABN} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] \cdot \overrightarrow{SN}| = \frac{1}{6} \left| (2\sqrt{2}) \cdot 0 + 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot (-\sqrt{2}) \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Thể tích khối tứ diện SBMN là:

$$V_{SBMN} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SN}| = \frac{1}{6} \left| (-2\sqrt{2}) \cdot 0 + 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot (-\sqrt{2}) \right| = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Thể tích khối chóp S.ABMN là:

$$V_{SABMN} = V_{SABN} + V_{SBMN} = \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \quad (\text{đvtt}).$$

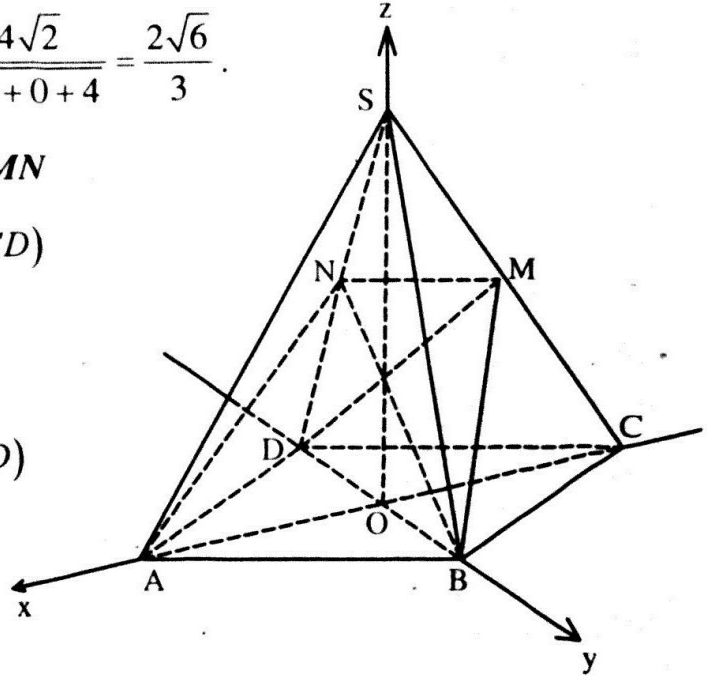
Câu IV.

1. Tính tích phân: $I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx.$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ dx = 2t dt \end{cases}$$

Đổi cận:

X	1	2
T	0	1



$$I = 2 \int_1^2 \frac{t^3 + t}{1+t} dt = 2 \int_0^1 \left(t^2 - t + 2 - \frac{2}{t+1} \right) dt$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + 2t - 2 \ln|t+1| \right) \Big|_0^1 = \frac{11}{3} - 4 \ln 2.$$

2. Tìm hệ số x^8

Ta có:

$$\left[1 + x^2(1-x) \right]^8 = C_8^0 + C_8^1 x^2(1-x) + C_8^2 x^4(1-x)^2 + C_8^3 x^6(1-x)^3 + C_8^4 x^8(1-x)^4$$

$$+ \dots + C_8^8 x^{16}(1-x)^8$$

Trong khai triển trên có 2 số hạng chứa x^8 là:

- $C_8^3 x^6(1-x)^3 \Rightarrow$ Hệ số của x^8 là: $3.C_8^3$
- $C_8^4 x^8(1-x)^4 \Rightarrow$ Hệ số của x^8 là: C_8^4

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển đã cho là: $C_8^3.3 + C_8^4 = 238$.

Câu V. Tính các góc của ΔABC

Ta có: $\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 A - 1 + 4\sqrt{2}\cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 A + 2\sqrt{2}\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} - 2 = 0$$

Ta có: $\sin \frac{A}{2} > 0$ và $0 < \cos \frac{B-C}{2} \leq 1$ nên:

$$2 = \cos^2 A + 2\sqrt{2}\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \leq \cos^2 A + 2\sqrt{2}\sin \frac{A}{2}$$

Mặt khác: ΔABC không tù nên $0 \leq \cos A < 1 \Rightarrow \cos^2 A \leq \cos A$

$$\text{Do đó: } 2 \leq \cos A + 2\sqrt{2}\sin \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \leq 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2} + 2\sqrt{2}\sin \frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \frac{A}{2} - \sqrt{2}\sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\sin \frac{A}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq 0$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi: } \begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos^2 A = \cos A \\ \cos \frac{B-C}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 90^\circ \\ B = C = 45^\circ \end{cases}$$

Vậy: $A = 90^\circ, B = C = 45^\circ$.

ĐỀ SỐ 20

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI B, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm uốn và chứng minh rằng Δ là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln^2 x}{x}$ trên đoạn $[1; e^3]$.

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(1;1), B(4;-3)$. Tìm điểm C thuộc đường thẳng $x - 2y - 1 = 0$ sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.
2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$). Tính tang của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD) theo φ . Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a và φ .
3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(-4;-2;4)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}.$$

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm A, cắt và vuông góc với đường thẳng d.

Câu IV. (2 điểm).

1. Tính tích phân: $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \cdot \ln x}{x} dx$.
2. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi (khó, trung bình, dễ) và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

Câu V. (1 điểm). Xác định m để phương trình sau có nghiệm

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}.$$

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

- Tập xác định : $D = \mathbb{R}$

- $y' = x^2 - 4x + 3, \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = \frac{4}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	0	$+\infty$	

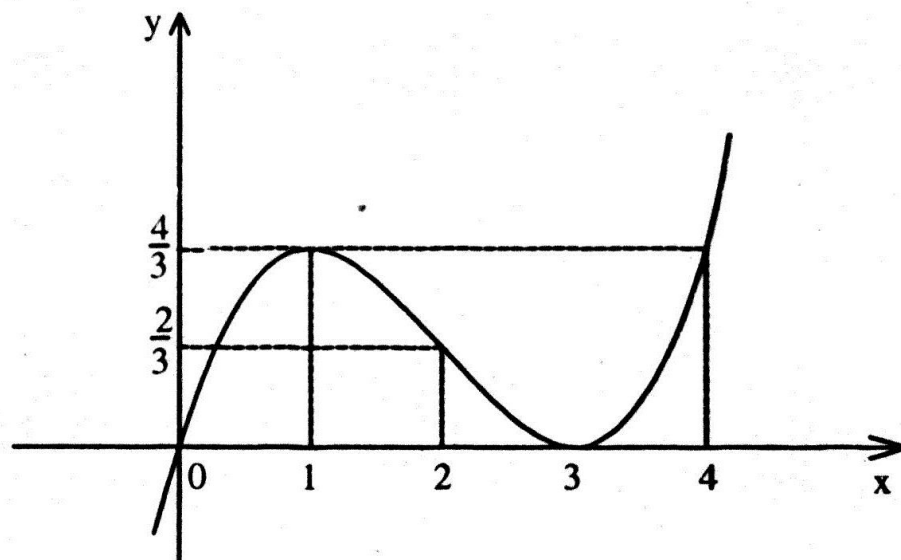
- Tính lồi, lõm và điểm uốn: $y'' = 2x - 4$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lồi	Đ.U $I\left(2; \frac{2}{3}\right)$	lõm

- Điểm đặc biệt: $y = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 3$

- Đồ thị:



2.

• **Viết phương trình tiếp tuyến Δ**

Đồ thị (C) có điểm uốn : $I\left(2; \frac{2}{3}\right)$

Tiếp tuyến Δ có hệ số góc là: $k_1 = y'(2) = -1$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại I có dạng: $y - \frac{2}{3} = -1 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow y = -x + \frac{8}{3}$

• **Chứng minh rằng Δ có hệ số góc nhỏ nhất.**

Xét điểm $M(x_0, y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{1}{3}x_0^3 - 2x_0^2 + 3x_0$

Tiếp tuyến tại điểm M có hệ số góc là :

$$k_2 = y'(x_0) = x_0^2 - 4x_0 + 3 = (x_0 - 2)^2 - 1 \geq -1$$

$$\Rightarrow \text{Min} k_2 = -1 = k_1, \text{ đạt được khi } x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow M\left(2; \frac{2}{3}\right) \equiv I$$

Vậy tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm uốn có hệ số góc nhỏ nhất (đpcm).

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Ta có: $5 \sin x - 2 = 3(1 - \sin x) \tan^2 x$

$$\Leftrightarrow (5 \sin x - 2) \cos^2 x = 3(1 - \sin x) \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (5 \sin x - 2)(1 - \sin^2 x) = 3(1 - \sin x) \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin x) \left[(5 \sin x - 2)(1 + \sin x) - 3 \sin^2 x \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0 \text{ (do } \cos x \neq 0 \Rightarrow \sin x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -2 & (\text{loại}) \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + l2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + l2\pi \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + l2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + l2\pi \end{cases} \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

Xét hàm số : $y = \frac{\ln^2 x}{x}, x \in [1; e^3]$

$$y' = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = 0 \\ \ln x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^2 \end{cases}$$

Ta có: $y(1) = 0, \quad y(e^2) = \frac{4}{e^2}, \quad y(e^3) = \frac{9}{e^3}$

Vậy: $\max_{[1; e^3]} y = \frac{4}{e^2}$, khi $x = e^2$

$\min_{[1; e^3]} y = 0$, khi $x = 1$.

Câu III.

1. Tìm tọa độ của C

Phương trình đường thẳng AB: $\frac{x-1}{4-1} = \frac{y-1}{-3-1} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$

Đặt (d): $x - 2y - 1 = 0$

$C \in (d) \Rightarrow C(2t+1; t)$

Ta có: $d(C, AB) = 6 \Leftrightarrow \frac{|11t-3|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11t-3| = 30$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 11t-3=30 \\ 11t-3=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow C_1(7;3) \\ t=-\frac{27}{11} \Rightarrow C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right) \end{cases}$

Vậy có hai điểm cần tìm là: $C_1(7;3), C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right)$.

3. Tính thể tích hình chóp

Gọi O là tâm hình vuông ABCD

Do S.ABCD là hình chóp tứ giác đều nên

$SO \perp (ABCD)$

$\Rightarrow OA$ là hình chiếu vuông góc của SA

trên mặt phẳng (ABCD) $\Rightarrow \widehat{SAO} = \varphi$

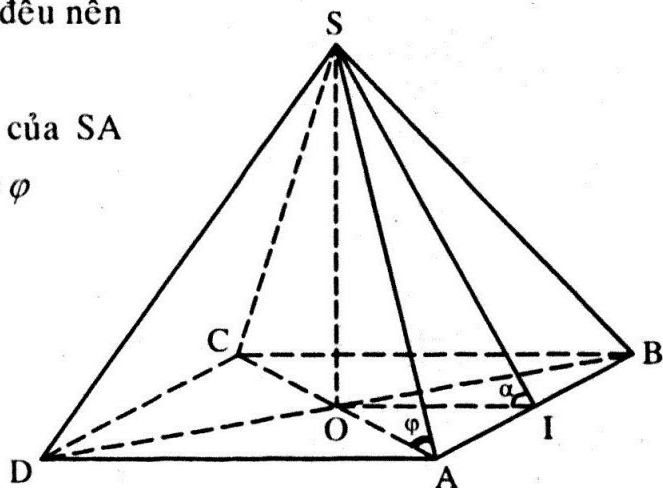
ΔSOA vuông tại O cho:

$SO = OA \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi,$

với $OA = \frac{1}{2} AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi I là trung điểm AB, ta có:

$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow \widehat{SIO} = \alpha$ là góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (ABCD).



$$\Delta SOI \text{ vuông tại } O \text{ cho: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi}{\frac{a}{2}} = \sqrt{2} \operatorname{tg} \varphi$$

$$\text{Thể tích hình chóp } S.ABCD \text{ là: } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} \operatorname{tg} \varphi.$$

3. Viết phương trình đường thẳng Δ

Đường thẳng d qua điểm $M(-3; 1; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -1; 4)$

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d thì (α) nhận $\vec{a}$ là vectơ pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$$2 \cdot (x + 4) - 1 \cdot (y + 2) + 4 \cdot (z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 4z - 10 = 0$$

Gọi (β) là mặt phẳng qua A chứa d thì (β) có cặp vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{AM} = (1; 3; -5), \vec{a} = (2; -1; 4)$$

$$\Rightarrow (\beta) \text{ có vectơ pháp tuyến: } \vec{n} = \frac{1}{7} [\overrightarrow{AM}, \vec{a}] = (1; -2; -1)$$

Phương trình mặt phẳng (β) có dạng:

$$1 \cdot (x + 4) - 2 \cdot (y + 2) - 1 \cdot (z - 4) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - z + 4 = 0$$

$\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ nên phương trình đường thẳng Δ có dạng:

$$\begin{cases} x - 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - y + 4z - 10 = 0 \end{cases}$$

Cách khác:

$$\text{Gọi } B = \Delta \cap d \Rightarrow B(-3 + 2t; 1 - t; -1 + 4t) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1 + 2t; 3 - t; -5 + 4t)$$

$$d \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{a} = (2; -1; 4). \Delta \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \vec{a} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(1 + 2t) - (3 - t) + 4(-5 + 4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (3; 2; -1)$$

Phương trình đường thẳng Δ qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 4}{-1}.$$

Câu IV.

$$1. \text{ Tính tích phân: } I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \cdot \ln x}{x} dx.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + 3 \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3 \ln x \Rightarrow \ln x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2}{3} t dt$$

$$\text{Đổi cận: } x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = 2$$

$$I = \int_1^2 \frac{t(t^2 - 1)}{3} \cdot \frac{2}{3} t dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_1^2 \Rightarrow I = \frac{116}{135}.$$

2. Xác định số đề kiểm tra

Ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Chọn đề có 2 câu dễ, 1 câu trung bình và 2 câu khó

$$\text{Có } C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 = 10500 \text{ cách}$$

Trường hợp 2. Chọn đề có 2 câu dễ, 2 câu trung bình và 1 câu khó

$$\text{Có } C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 = 23625 \text{ cách}$$

Trường hợp 3. Chọn đề có 3 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó

$$\text{Có } C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 22750 \text{ cách}$$

Vậy có tất cả: $C_{15}^2 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^2 + C_{15}^2 \cdot C_{10}^2 \cdot C_5^1 + C_{15}^3 \cdot C_{10}^1 \cdot C_5^1 = 56875$ (đề kiểm tra).

Câu V. Tìm m để phương trình có nghiệm

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$. Đặt $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$

Xét hàm số: $g(x) = t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1; 1]$

$$g'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	-1	0	1
g'(x)		- 0 +	
g(x)	$\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$

Từ bảng biến thiên ta thấy: $0 \leq g(x) \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}$

Ta có: $t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \Rightarrow 2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow m(t+2) = 2 - t^2 + t, \quad t \in [0; \sqrt{2}] \Leftrightarrow m = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}, \quad t \in [0; \sqrt{2}]$$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2}$, $t \in [0; \sqrt{2}]$

$$f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2}; \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \in [0, \sqrt{2}] \\ t = -4 \notin [0, \sqrt{2}] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	0	$\sqrt{2}$
f'(t)		-
f(t)	1	$\sqrt{2} - 1$

ĐỀ SỐ 21

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI D, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$ (1) với m là tham số.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 2$.
2. Tìm m để điểm uốn của đồ thị hàm số (1) thuộc đường thẳng $y = x + 1$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$.
2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$$

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có các đỉnh $A(-1;0)$, $B(4;0)$, $C(0;m)$ với $m \neq 0$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m . Xác định m để tam giác GAB vuông tại G.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng ABC.A₁B₁C₁. Biết $A(a; 0; 0)$, $B(-a; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$, $B_1(-a; 0; b)$, $a > 0$, $b > 0$.
 - a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B₁C và AC₁ theo a , b .
 - b) Cho a , b thay đổi, nhưng luôn thỏa mãn $a + b = 4$. Tìm a , b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B₁C và AC₁ lớn nhất.
3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P).

Câu IV. (2 điểm).

1. Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$.
2. Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niuton của
$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^7$$
 với $x > 0$.

Câu V. (1 điểm).

Chứng minh rằng phương trình sau có đúng một nghiệm: $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 2$

Khi $m = 2$, ta có: $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

- $y' = 3x^2 - 12x + 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 5 \\ x = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

- Tính lồi, lõm và điểm uốn: $y'' = 6x - 12$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lõm	Đ.U $I(2;3)$	lồi

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 1$
- Đồ thị: hình bên

2. Tìm m

$$y = x^3 - 3mx^2 + 9x + 1$$

$$y' = 3x^2 - 6mx + 9; y'' = 6x - 6m$$

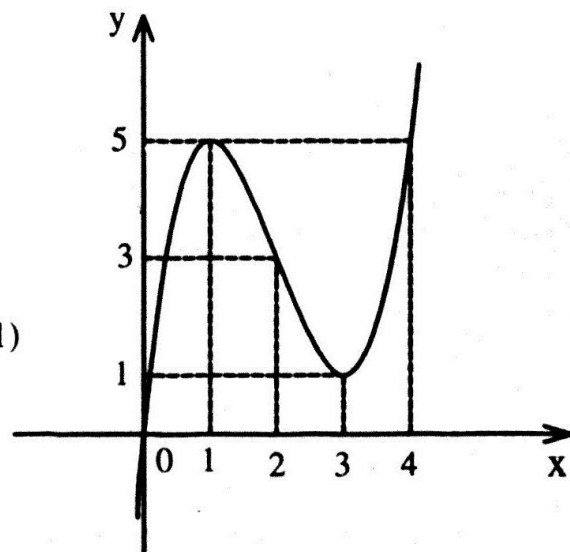
$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = m \Rightarrow y = -2m^3 + 9m + 1$$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm uốn: } I(m; -2m^3 + 9m + 1)$$

$$\text{Ta có: } I \in (d): y = x + 1$$

$$\Leftrightarrow -2m^3 + 9m + 1 = m + 1$$

$$\Leftrightarrow m(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$



Vậy giá trị cần tìm là: $m = 0 \vee m = \pm 2$.

Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Ta có: } (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \sin x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm

Điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0$

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ (\sqrt{x})^3 + (\sqrt{y})^3 = 1 - 3m \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y) = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 3\sqrt{xy} = 1 - 3m \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} S = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad (S \geq 0) \\ P = \sqrt{xy} \quad (P \geq 0) \end{cases}$

Ta được: $\begin{cases} S = 1 \\ S - 3P = 1 - 3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = m \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \geq 0, \forall m \\ P = m \geq 0 \\ S - 4P = 1 - 4m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$.

Câu III.

1. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC theo m

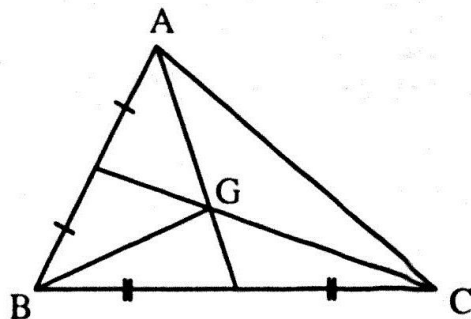
Tọa độ trọng tâm G của ΔABC là:

$$\begin{cases} x = \frac{x + x + x}{3} = \frac{-1 + 4 + 0}{3} = 1 \\ y = \frac{y + y + y}{3} = \frac{0 + 0 + m}{3} = \frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(1; \frac{m}{3}\right)$$

• Xác định m để tam giác GAB vuông tại G

Ta có: $\overrightarrow{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right), \overrightarrow{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$

ΔABC vuông tại G $\Leftrightarrow GA \perp GB$



$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow (-2) \cdot 3 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m^2 = 54 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = \pm 3\sqrt{6}$.

2.

a) **Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1**

Ta có: $B_1(-a; 0; b)$, $C_1(0; 1; b)$

$$\overrightarrow{B_1C} = (a; 1; -b), \overrightarrow{AC_1} = (-a; 1; b), \overrightarrow{CC_1} = (0; 0; b)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}] = (2b; 0; 2a)$$

Khoảng cách giữa AC_1 và B_1C là:

$$\begin{aligned} d = d(AC_1, B_1C) &= \frac{[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}] \cdot \overrightarrow{CC_1}}{\|[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}]\|} \\ &= \frac{2ab}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{aligned}$$

b) **Tìm a, b để khoảng cách giữa hai đường thẳng B_1C và AC_1 lớn nhất**

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \leq \frac{a+b}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (\text{do } a+b=4)$$

$$\Rightarrow \text{Max} d = \sqrt{2}, \text{ đạt được khi: } \begin{cases} a=b>0 \\ a+b=4 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=2$$

3. **Viết phương trình mặt cầu đi qua ba điểm A, B, C và có tâm thuộc mặt phẳng (P) .**

Gọi (S) là mặt cầu cần tìm và $I(a; b; c)$, R lần lượt là tâm và bán kính của (S)

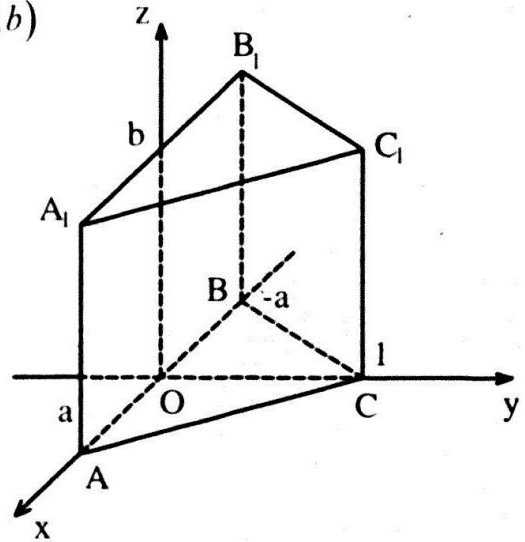
Ta có: $I \in (P) \Rightarrow a+b+c-2=0$ (1)

$$IA = IB = IC = R \Rightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2-a)^2 + b^2 + (1-c)^2 = (1-a)^2 + b^2 + c^2 \\ (2-a)^2 + b^2 + (1-c)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=2 \\ a-b=1 \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 0; 1), R=1$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng: $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.



Câu IV.

1. **Tính tích phân:** $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$

Đặt $\begin{cases} u = \ln(x^2 - x) \Rightarrow dv = \frac{2x-1}{x^2-x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{cases}$

$$I = x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{2x-1}{x-1} dx = 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - \int_2^3 \left(2 + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$= 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - (2x + \ln|x-1|) \Big|_2^3 = 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - (2 + \ln 2) = 3 \ln 3 - 2$$

2. **Tìm các số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức Niuton**

Xét nhị thức: $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^7$

Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k \cdot a^{n-k} \cdot b^k = C_7^k \cdot (\sqrt[3]{x})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)^k = C_7^k \cdot x^{\frac{7}{3} - \frac{7k}{12}}$

Số hạng không chứa x là số hạng ứng với k thỏa: $\frac{7}{3} - \frac{7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4$

Vậy số hạng không chứa x là: $C_7^4 = 35$.

Câu V. Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất

Ta có: $x^5 - x^2 - 2x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x^5 = (x+1)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow (x+1)^2 \geq 1 \Rightarrow x^5 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

Xét hàm số: $f(x) = x^5 - x^2 - 2x - 1, x \geq 1$

$$f'(x) = 5x^4 - 2x - 2, f''(x) = 20x^3 - 2 > 0, \forall x \geq 1$$

Bảng biến thiên

x	1	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$	1	$+\infty$

$$\Rightarrow f'(x) \geq f'(1) = 1 > 0, \forall x \geq 1; f(x) \text{ là hàm số đồng biến } \forall x \in [1, +\infty)$$

Mặt khác: $\begin{cases} f'(1) = -3 \\ f'(2) = 23 \end{cases} \Rightarrow f'(1) \cdot f'(2) < 0$

$$f(x) = 0 \text{ có ít nhất một nghiệm } x \in (1; 2)$$

Ngoài ra: $f(x)$ là hàm số liên tục $\forall x \geq 1$ (3)

Từ (1), (2) và (3), suy ra phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x \in (1; 2)$.

ĐỀ SỐ 22

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M (-1; 7).

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \cos x} = 1$.

2. Giải bất phương trình $2x^{\frac{1}{2} \log_2 x} \geq 2x^{\frac{3}{2} \log_2 x}$.

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm A(0; 2) và đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$. Tìm trên đường thẳng d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và $AB = 2BC$.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, AC cắt BD tại gốc tọa độ O.

Biết $A(-\sqrt{2}; -1; 0)$, $B(\sqrt{2}; -1; 0)$, $S(0; 0; 3)$.

a) Viết phương trình mặt phẳng qua trung điểm M của cạnh AB, song song với hai đường thẳng AD và SC.

b) Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm B và vuông góc với SC. Tính diện tích hình thiết diện của chóp S.ABCD với mặt phẳng (P).

Câu IV. (2 điểm).

1. Tính tích phân: $I = \int_0^2 \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 4} dx$.

2. Cho tập A gồm n phần tử, $n > 4$. Tìm n, biết rằng trong số các tập con của tập A có đúng 16n tập con có số phần tử là số lẻ.

Câu V. (1 điểm).

Chứng minh rằng phương trình $x^{x+1} = (x+1)^x$ có một nghiệm dương duy nhất.

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số (1):** $y = x + \frac{1}{x}$ (C)

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 \\ x = 1 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

- Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty \Rightarrow x = 0$ là đường tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x + \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x \text{ là đường tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$	
y'		+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$		-2		$+\infty$		2	$+\infty$

- Điểm đặc biệt: $y = 0 \Leftrightarrow x \in \emptyset$

- Đồ thị: hình bên

2. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M (-1; 7)

Phương trình đường thẳng Δ qua M với hệ số góc k có dạng: $y = k(x + 1) + 7$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = k(x + 1) + 7 & (1) \\ 1 - \frac{1}{x^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được:

$$x + \frac{1}{x} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)(x + 1) + 7 \quad (x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow k = -3 \\ x = -\frac{1}{4} \Rightarrow k = -15 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3x + 4$, $y = -15x - 8$.

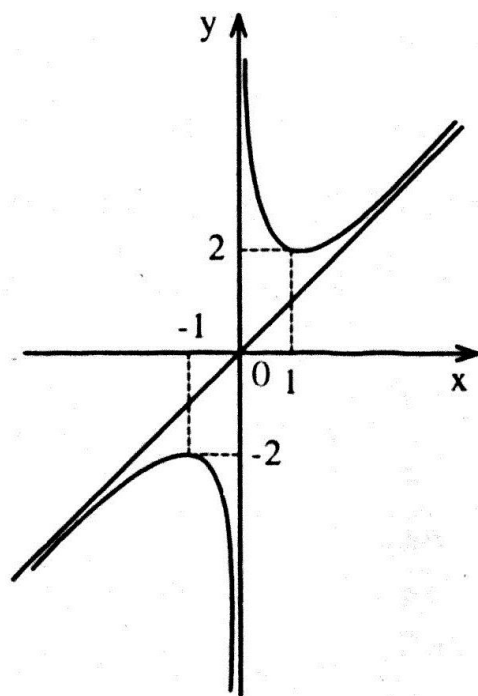
Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có: $\sqrt{1 - \sin x} + \sqrt{1 - \cos x} = 1$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin x + 1 - \cos x + 2\sqrt{(1 - \sin x)(1 - \cos x)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1 - (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x} = \sin x + \cos x - 1 \quad (1)$$



$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(1-\sin x)(1-\cos x)} = \sin x + \cos x - 1$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$$

$$\text{Ta được: } 2\sqrt{1-t+\frac{1}{2}(t^2-1)} = t-1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot |t-1| = t-1 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 1 \\ 2(t-1)^2 = (t-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow t=1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Giải bất phương trình

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \frac{1}{2} \log_2 x \Rightarrow x = 2^{2t}$

$$\text{Ta có: } 2 \cdot x^{\frac{1}{2} \log_2 x} \geq 2^{\frac{3}{2} \log_2 x} \Leftrightarrow 2 \cdot (2^{2t})^t \geq 2^{3t} \Leftrightarrow 2^{2t^2+1} \geq 2^{3t} \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq \frac{1}{2} \\ t \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \log_2 x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \log_2 x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \leq 1 \\ \log_2 x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 2 \\ x \geq 4 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $0 < x \leq 2 \vee x \geq 4$.

Câu III.

1. Tìm tọa độ hai điểm B, C

$$\text{Đặt } B(2t_1 - 2; t_1) \in d \text{ và } C(2t_2 - 2; t_2) \in d \Rightarrow \overline{AB} = (2t_1 - 2; t_1 - 2)$$

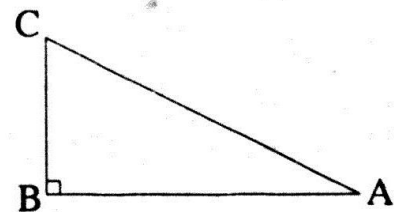
Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (2; 1)$

$$\text{Ta có: } AB \perp BC \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \vec{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2t_1 - 2) + t_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow t_1 = \frac{6}{5} \Rightarrow B\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$\text{Mặt khác: } AB = 2BC \Leftrightarrow AB^2 = 4BC^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{6}{5} - 2\right)^2 = 4 \left[\left(2t_2 - \frac{12}{5}\right)^2 + \left(t_2 - \frac{6}{5}\right)^2 \right]$$



$$\Leftrightarrow 5t_2^2 - 12t_2 + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 1 \Rightarrow C(0;1) \\ t_2 = \frac{7}{5} \Rightarrow C\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right) \end{cases}$$

Vậy các điểm cần tìm là : $B\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right), C(0;1)$ hay $B\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right), C\left(\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

2.

a) **Viết phương trình mặt phẳng:**

M là trung điểm AB $\Rightarrow M(0; -1; 0)$

Tứ giác ABCD là hình chữ nhật nên O

là trung điểm AC và BD

$\Rightarrow C(\sqrt{2}; 1; 0), D(-\sqrt{2}; 1; 0)$

Ta có: $\overrightarrow{AD} = (0; 2; 0)$

$\overrightarrow{SD} = (-\sqrt{2}; 1; -3), \overrightarrow{SC} = (\sqrt{2}; 1; -3)$

Gọi (α) là mặt phẳng qua M

và song song với AD, SC thì

(α) nhận $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{SC}$ là cặp

vectơ chỉ phương.

$\Rightarrow (\alpha)$ có vectơ pháp tuyến

$$\vec{n} = -\frac{1}{2}[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{SC}] = (3; 0; \sqrt{2})$$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng : $3.(x-0) + 0.(y+1) + \sqrt{2}.(z-0) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x + \sqrt{2}z = 0$$

b) **Tính diện tích thiết diện**

Trong ΔSBC , kẻ $BH \perp SC$. Trong ΔSCD , từ H kẻ đường thẳng vuông góc

với SC tại H, cắt CD tại điểm K. Ta có: $\begin{cases} SC \perp HB \\ SC \perp HK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK)$

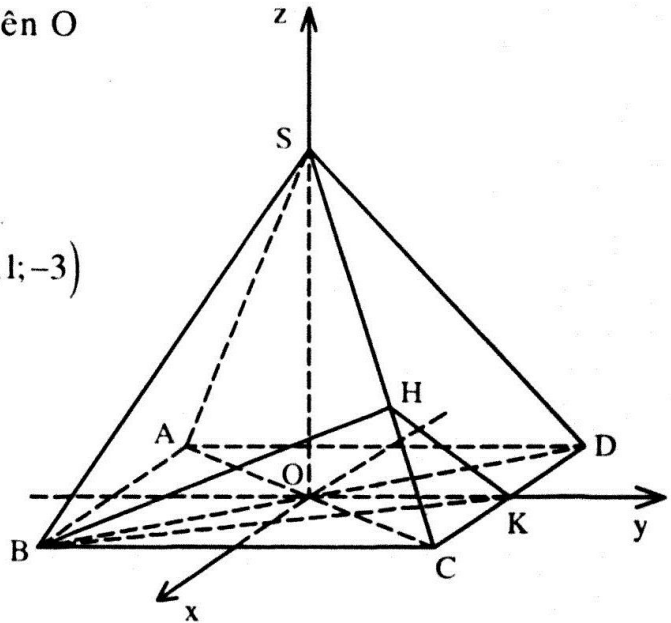
$\Rightarrow \Delta BHK$ là thiết diện của mặt phẳng (P) và hình chóp S.ABCD.

Mặt phẳng (P) qua $B(\sqrt{2}; -1; 0)$ nhận $\overrightarrow{SC}$ làm vectơ pháp tuyến có phương

trình: $\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 1(y + 1) - 3(z - 0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}.x + y - 3z - 1 = 0$.

Đường thẳng SC nhận $\overrightarrow{SC}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2}.t \\ y = t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$$



Tham số t ứng với giao điểm $H = SC \cap (P)$ là nghiệm của phương trình :

$$2t + t - 3(3 - 3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{6} \Rightarrow H\left(\frac{5\sqrt{2}}{6}; \frac{5}{6}; \frac{1}{2}\right)$$

Đường thẳng CD nhận $\vec{i} = (1; 0; 0)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} + t' \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Tham số t' ứng với giao điểm $K = (CD) \cap (P)$ là nghiệm của phương trình :

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} + t') + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t' = -\sqrt{2} \Rightarrow K(0; 1; 0)$$

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{BH} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}; \frac{11}{6}; \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{BK} = (-\sqrt{2}; 2; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BK}] = \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{Diện tích } \Delta BHK \text{ là : } S = \frac{1}{2} \| [\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BK}] \| = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } I &= \int_0^2 \frac{x^4 - x + 1}{x^2 + 4} dx = \int_0^2 \left(x^2 - 4 - \frac{x}{x^2 + 4} + \frac{17}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(x^2 - 4 - \frac{x}{x^2 + 4} \right) dx + 17 \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4} = I_1 + 17I_2 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Tính } I_1 = \int_0^2 \left(x^2 - 4 - \frac{x}{x^2 + 4} \right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x - \frac{1}{2} \ln |x^2 + 4| \right) \Big|_0^2 = -\frac{16}{3} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$\bullet \text{ Tính } I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4}.$$

$$\text{Đặt } x = 2 \tan t \Rightarrow dx = 2(1 + \tan^2 t) dt, t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

Đổi cận:

x	0	2
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$I_2 = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1 + \tan^2 t) dt}{4(\tan^2 t + 1)} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Vậy : } I = -\frac{16}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{17\pi}{8}.$$

2. Tìm n

Xét nhị thức: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ (*)

Thế $x = 1$ vào (*), ta được: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$ (1)

Thế $x = -1$ vào (*), ta được: $0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n$ (1)

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế, ta có: $2^n = 2(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots)$

$$\Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$$

Số tập con có phần tử là số lẻ: $C_n^1, C_n^3, C_n^5, \dots$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots + C_n^{n-1} = 16n$

$$\Leftrightarrow 2^{n-1} = 16n \Leftrightarrow 2^{n-5} = n \quad (n > 4)$$

Với $n = 5$: Không là nghiệm của phương trình

Với $n \geq 6$: Nhận thấy $n = 8$ là một nghiệm của phương trình

Xét hàm số: $f(x) = 2^{x-5} - x, x \geq 6$

Ta có: $f'(x) = 2^{x-5} \ln 2 - 1 \geq 2 \ln 2 - 1 > 0, \forall x \geq 6$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến $\forall x \geq 6 \Rightarrow n = 8$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Vậy giá trị cần tìm là: $n = 8$.

Câu V. Chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất

Điều kiện: $x > 0$

Ta có: $x^{x+1} = (x+1)^x \Leftrightarrow (x+1) \ln x = x \ln(x+1) \Leftrightarrow (x+1) \ln x - x \ln(x+1) = 0$

Xét hàm số: $f(x) = (x+1) \ln x - x \ln(x+1), x > 0$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = -\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1}$$

Đặt $t = \frac{x+1}{x}$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$

Ta có: $g(t) = -\ln t + t - \frac{1}{t}, t > 1$

$$g'(t) = -\frac{1}{t} + 1 + \frac{1}{t^2} > 0, \forall t > 1 \Rightarrow g(t) > g(1) = 0, \forall t > 1$$

$\Rightarrow f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến $\forall x > 0$ (1)

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} f(2) = \ln \frac{8}{9} < 0 \\ f(3) = \ln \frac{81}{64} > 0 \end{cases} \Rightarrow f(2) \cdot f(3) < 0$$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $x_0 \in (2; 3)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x_0 \in (2; 3)$.

ĐỀ SỐ 23

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2mx + 2}{x - 1}$ (1) với m là tham số.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai cực điểm trị A và B. Chứng minh rằng đường thẳng AB song song với đường thẳng $2x - y - 10 = 0$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\sin 4x \sin 7x = \cos 3x \cos 6x$.
2. Giải bất phương trình: $\log_3 x > \log_x 3$.

Câu III. (3 điểm).

1. Trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (E) song song với đường thẳng $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm A(2; 0; 0) và M(1; 1; 1).
 - a) Tìm tọa độ điểm O' đối xứng với gốc tọa độ O qua đường thẳng AM.
 - b) Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, nhưng luôn đi qua đường thẳng AM và cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại các điểm: B (0; b; 0), C (0; 0; c) với $b > 0$, $c > 0$. Chứng minh rằng: $b + c = \frac{bc}{2}$ và tìm b, c sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất.

Câu IV. (2 điểm).

1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin 2x dx$.
2. Giả sử $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$.
Biết rằng $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 729$.
Tìm n và số lớn nhất trong các số: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Câu V. (1 điểm).

Xét các tam giác ABC thỏa mãn các điều kiện:

$$A \leq 90^\circ \text{ và } \sin A = 2 \sin B \sin C \tan \frac{A}{2}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{\sin B}$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có: $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $y' = \frac{x - 2}{(x - 1)}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$
- Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x - 1 \text{ là đường tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = -2$
- Đồ thị: hình bên

2.

- Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai cực điểm trị A và B

$$y' = \frac{x^2 - 2x + 2m - 2}{(x - 1)^2}$$

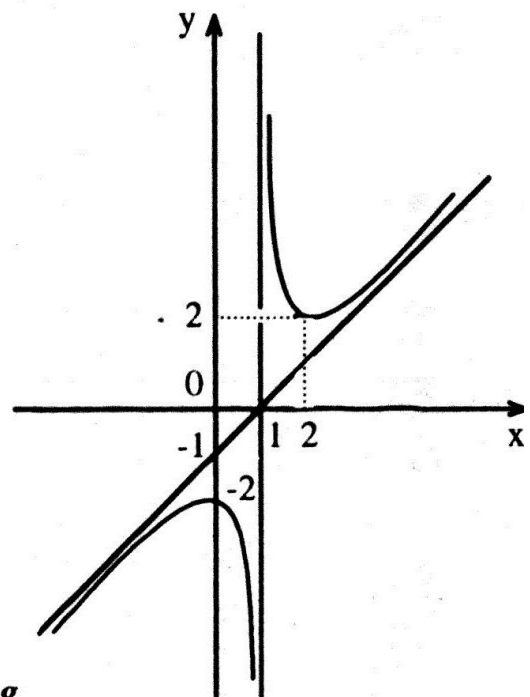
$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2m - 2 = 0 \quad (x \neq 1) \quad (*)$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua mỗi nghiệm

$$\text{đó} \Leftrightarrow \Delta' = 3 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

- Chứng minh rằng đường thẳng AB song song với đường thẳng $2x - y - 10 = 0$.

Đặt $\Delta: 2x - y - 10 = 0$. Đường thẳng Δ có hệ số góc $k_1 = 2$



Khi $m < \frac{3}{2}$, ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{3 - 2m} \Rightarrow y_1 = 2 - 2m - 2\sqrt{3 - 2m} \\ x_2 = 1 + \sqrt{3 - 2m} \Rightarrow y_2 = 2 - 2m + 2\sqrt{3 - 2m} \end{cases}$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, ta có: $\overrightarrow{AB} = (2\sqrt{3 - 2m}; 4\sqrt{3 - 2m}) = (a_1; a_2)$

Đường thẳng AB có hệ số góc là: $k_2 = \frac{a_2}{a_1} = 2 = k_1$

Vậy $AB \parallel \Delta$ (đpcm).

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có: $\sin 4x \sin 7x = \cos 3x \cos 6x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 11x) = \frac{1}{2}(\cos 9x + \cos 3x)$$

$$\Leftrightarrow \cos 9x + \cos 11x = 0 \Leftrightarrow 2 \cos 10x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{20} + k\frac{\pi}{10} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Giải bất phương trình

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1$.

Ta có: $\log_3 x > \log_x 3 \Leftrightarrow \log_3 x > \frac{1}{\log_3 x}$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3^2 x - 1}{\log_3 x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < \log_3 x < 0 \\ \log_3 x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $\frac{1}{3} < x < 1 \vee x > 3$.

Câu III.

1. Viết phương trình các tiếp tuyến của (E)

Đặt d: $x + \sqrt{2}y - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng Δ song song với d có dạng:

$$x + \sqrt{2}y + C = 0 \quad (C \neq -1)$$

$$\Delta \text{ tiếp xúc với (E)} \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \Leftrightarrow 8 + 2.4 = C^2 \Leftrightarrow C^2 = 16 \Leftrightarrow C = \pm 4$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm: $x + \sqrt{2}y - 4 = 0, x + \sqrt{2}y + 4 = 0$.

2. a) Tìm tọa độ điểm O' đối xứng với gốc tọa độ O qua đường thẳng AM

Đường thẳng AM nhận $\overrightarrow{AM} = (-1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình dạng:

$$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

Gọi (α) là mặt phẳng qua O và vuông góc với AM thì (α) nhận $\overline{AM}$ làm vector pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x - y - z = 0$

Tham số t ứng với giao điểm $I = (\alpha) \cap AM$ là nghiệm của phương trình:

$$2 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

O' đối xứng với O qua AM nên I là trung điểm

$$OO': \Rightarrow \begin{cases} x_{O'} = 2x_I - x_O = \frac{8}{3} \\ y_{O'} = 2y_I - y_O = \frac{4}{3} \\ z_{O'} = 2z_I - z_O = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow O'\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

b. Chứng minh rằng $b + c = \frac{bc}{2}$

$$AM \subset (P) \Rightarrow (P) \cap Ox = A$$

Phương trình mặt phẳng (P) theo đoạn chắn có dạng: $\frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Ta có: $M \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow b + c = \frac{bc}{2}$ (đpcm).

Ta có: $\overline{AB} = (-2; b; 0)$, $\overline{AC} = (-2; 0; c)$; $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (bc; 2c; 2b)$

Diện tích ΔABC là: $S = \frac{1}{2} \left| [\overline{AB}, \overline{AC}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + 4c^2 + 4b^2}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{bc}{2} = b + c \geq 2\sqrt{bc}$

$$\Rightarrow b^2 c^2 \geq 16bc \Rightarrow bc \geq 16 \text{ (do } b > 0, c > 0 \text{)}.$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$S \geq \frac{1}{2} \sqrt{b^2 c^2 + 8bc} \geq \frac{1}{2} \sqrt{256 + 128} = 4\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \min S = 4\sqrt{6}, \text{ đạt được khi: } \begin{cases} b = c > 0 \\ \frac{bc}{2} = b + c \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 4$$

Vậy giá trị cần tìm là: $b = c = 4$.

Câu IV.**1. Tính tích phân**

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin 2x dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x \cos x dx$$

$$\text{Đặt } t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow \sin x dx = -dt$$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	1	0

$$I = -2 \int_1^0 t e^t dt = 2 \int_0^1 t e^t dt. \text{ Đặt } \begin{cases} u = 2t \Rightarrow du = 2dt \\ dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t \end{cases}$$

$$I = 2te^t \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 e^t dt = 2e - 2e^t \Big|_0^1 = 2$$

2. Tìm n và số lớn nhất trong các số: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

$$\text{Xét nhị thức: } (1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (1)$$

$$\text{Thế } x = 1 \text{ vào (1), ta có: } 3^n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 729 \Leftrightarrow 3^n = 3^6 \Leftrightarrow n = 6$$

$$\text{Khi đó: } (1+2x)^6 = \sum_{k=0}^6 C_6^k 2^k x^k \Rightarrow a_k = C_6^k 2^k \quad (0 \leq k \leq 6)$$

$$\text{Ta có: } a_k = C_6^k 2^k = \frac{6!}{k!(6-k)!}, a_{k+1} = C_6^{k+1} 2^{k+1} = \frac{6!}{(k+1)!(5-k)!} \cdot 2^{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!(6-k)!}{(k+1)!(5-k)!} \cdot 2 = \frac{2(6-k)}{k+1}$$

- $a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow 2(6-k) > k+1 \Leftrightarrow k < \frac{11}{3}$
- $a_{k+1} < a_k \Leftrightarrow 2(6-k) < k+1 \Leftrightarrow k > \frac{11}{3}$

Suy ra, khi $k \leq 3$ dãy số a_k tăng và $k \geq 4$ dãy số a_k giảm

$$\Rightarrow \max_{k \in [0;6]} a_k = \max \{a_3 = C_6^3 2^3, a_4 = C_6^4 2^4\} = \max \{160, 240\} = 240$$

Vậy $\max a_k = a_4 = 240$.

Câu V. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\text{Đặt } M = \frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{\sin B}$$

Ta có: $\sin A = 2 \sin B \sin C \operatorname{tg} \frac{A}{2} \Leftrightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = 2 \sin B \sin C \cdot \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 \frac{A}{2} = 2 \sin B \sin C \Leftrightarrow 1 + \cos A = \cos(B - C) - \cos(B + C)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos A = \cos(B - C) + \cos A \Leftrightarrow \cos(B - C) = 1 \Leftrightarrow B = C$$

Mặt khác: $B + C = 180^\circ - A \Leftrightarrow 2B = 180^\circ - A$

Do $A \leq 90^\circ \Rightarrow 2B \geq 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow B \geq 45^\circ$

Khi đó: $M = \frac{1 - \sin \frac{A}{2}}{\sin B} = \frac{1 - \cos \frac{B+C}{2}}{\sin B} = \frac{1 - \cos B}{\sin B} = \frac{2 \sin^2 \frac{B}{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$

$$\Rightarrow M \geq \operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$$

Ta có: $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8}} \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} = 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} + 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = -1 - \sqrt{2} < 0 \quad (\text{loại}) \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

Vậy $\min M = \sqrt{2} - 1$, đạt được khi: $\begin{cases} B = C = 45^\circ \\ A = 90^\circ \end{cases}$.

ĐỀ SỐ 24

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 3, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ (1) với m là tham số.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3\sin x$.
2. Giải bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}} \left[\log_2 \left(x + \sqrt{2x^2 - x} \right) \right] < 0$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ và điểm $A(-1; 1)$. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A, qua gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng d.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A₁B₁C₁D₁ có A trùng với gốc tọa độ O, B(1; 0; 0), D(0; 1; 0), A₁(0; 0; $\sqrt{2}$).
 - a) Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A₁, B, C và viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B₁D₁ trên mặt phẳng (P).
 - b) Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với A₁C. Tính diện tích thiết diện của hình chóp A₁ABCD với mặt phẳng (Q).

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính thể tích của vật thể tròn xoay sinh ra bởi phép quay xung quanh trục Ox của hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và đường $y = \sqrt{x} \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).
2. Cho tập A gồm n phần tử, $n \geq 7$. Tìm n , biết rằng số tập con gồm 7 phần tử của tập A bằng hai lần số tập con gồm 3 phần tử của tập A.

Câu V. (1 điểm)

Gọi (x, y) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$ với m là tham số.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 - 2x$, khi m thay đổi.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có: $y = x^4 - 2x^2 + 1$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

- $y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	0	1	0	$+\infty$

- Tính lồi, lõm và điểm uốn: $y'' = 12x^2 - 4$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{9}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$			
y''	+	0	-	0	+		
Đồ thị	lõm	Đ.U $I_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{4}{9}\right)$		lồi	Đ.U $I_2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{4}{9}\right)$		lõm

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 1; y = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

- Đồ thị: hình bên

2. Tìm m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị là ba đỉnh của một tam giác vuông cân

$$y' = 4x^3 - 4m^2x; y' = 0$$

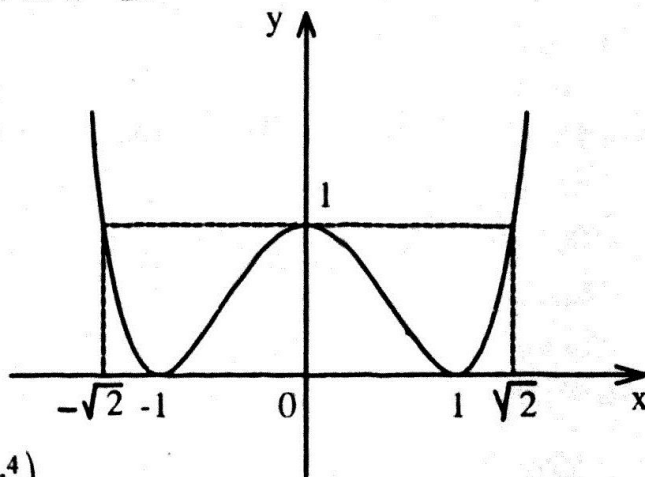
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm m \Rightarrow y = 1 - m^4 \end{cases}$$

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$

Đặt $A(0; 1), B(-m; 1 - m^4), C(m; 1 - m^4)$

ta có: $\overrightarrow{AB} = (-m, -m^4), \overrightarrow{AC} = (m, -m^4)$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số (1) nhận Oy làm trục đối xứng nên $AB = AC, \forall m \neq 0$



$$\begin{aligned} \text{Do đó, yêu cầu bài toán} &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -m^2 + m^8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^6 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1. \end{aligned}$$

Vậy giá trị cần tìm là : $m = \pm 1$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có: $4(\sin^3 x + \cos^3 x) = \cos x + 3 \sin x$

$$\Leftrightarrow (3 \sin x - 4 \sin^3 x) + (\cos x - 4 \cos^3 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x [3 - 4(1 - \cos^2 x)] + \cos x (1 - 4 \cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x (4 \cos^2 x - 1) + \cos x (1 - 4 \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow (4 \cos^2 x - 1)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \cos x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \cos x = \pm \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Cách khác

Nhận xét: $\cos x = 0$ không thỏa phương trình. Chia 2 vế của (1) cho $\cos^3 x$, ta được:

$$4 \operatorname{tg}^3 x + 4 = 1 + \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\operatorname{tg} x - 1)(\operatorname{tg}^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Giải bất phương trình

Ta có: $\log_{\frac{\pi}{4}} \left[\log_2 (x + \sqrt{2x^2 - x}) \right] < 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x + \sqrt{2x^2 - x}) > 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{2x^2 - x} > 2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - x} > 2 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x^2 + 3x - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2 \vee \begin{cases} x \leq 2 \\ x < -4 \vee x > 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 2 \vee \begin{cases} x < -4 \\ 1 < x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < -4 \vee x > 1$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x < -4 \vee x > 1$.

Câu III.

1. Viết phương trình đường tròn đi qua điểm A, O và tiếp xúc với đường thẳng d

Gọi (C) là đường tròn cần tìm và I (a; b) và R lần lượt là tâm và bán kính của (C). (C) qua hai điểm A, O và tiếp xúc d nên ta có: $IA = IO = d(I, d) = R$

$$\bullet \quad IA = IO \Leftrightarrow IA^2 = IO^2$$

$$\Leftrightarrow (a+1)^2 + (b-1)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1 \quad (1)$$

$$\bullet \quad IO = d(I, d) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|a - b + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (a+1)^2} = \frac{|a - (a+1) + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} \quad (\text{do (1)})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + 2a + 1} = 1 \Leftrightarrow a^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow I(0; 1), R = 1 \\ a = -1 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow I(-1; 0), R = 1 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là: $x^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x+1)^2 + y^2 = 1$.

3. a) Ta có: $C(1; 1; 0), B_1(1; 0; \sqrt{2}), D_1(0; 1; -\sqrt{2})$

$$\overrightarrow{A_1B} = (1; 0; -\sqrt{2}), \overrightarrow{A_1C} = (1; 1; -\sqrt{2}), \overrightarrow{B_1D_1} = (-1; 1; 0)$$

• Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A₁, B, C

Mặt phẳng (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}$

$$\Rightarrow (P) \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = [\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}] = (\sqrt{2}; 0; 1)$$

Mặt khác: (P) qua điểm B nên có phương trình:

$$\sqrt{2}(x-1) + z = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x + z - \sqrt{2} = 0.$$

• Viết phương trình hình chiếu vuông góc của B₁D₁ trên (P)

Gọi (α) là mặt chứa B₁D₁ và vuông góc với (P) thì (α) qua B₁ và nhận $\overrightarrow{B_1D_1}, \vec{n}$

làm cặp vectơ chỉ phương. $\Rightarrow$ (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}' = [\overrightarrow{B_1D_1}, \vec{n}] = (1; 1; -\sqrt{2})$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) - \sqrt{2} \cdot (z-\sqrt{2}) = 0$

$$\Leftrightarrow x + y - \sqrt{2}z + 1 = 0$$

Gọi d là hình chiếu vuông góc của B₁D₁ lên (P) thì $d = (P) \cap (\alpha)$

Phương trình đường thẳng d có dạng:
$$\begin{cases} \sqrt{2}x + z - \sqrt{2} = 0 \\ x + y - \sqrt{2}z + 1 = 0 \end{cases}$$

b) Tính diện tích thiết diện của hình chóp A_1ABCD với mặt phẳng (Q)

Ta có:

• **Dựng thiết diện ΔA_1AC**

có $AA_1 = AC' = \sqrt{2}$ nên vuông cân tại A

Gọi C' là trung điểm của A_1C thì

$AC' \perp A_1C$

Gọi $I = AC \cap BD$ và

$G = A_1I \cap AC'$ thì G là trọng tâm ΔA_1AC

ΔA_1AC

Ta có:
$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow BD \perp (AA_1C) \Rightarrow BD \perp A_1C$

Mặt khác:

$A_1C \perp (Q)$ nên $BD \parallel (Q)$

Mà $BD \subset (A_1BD)$ nên mặt phẳng (Q) sẽ cắt mặt phẳng (A_1BD) theo giao tuyến song song với BD . Trong mặt phẳng (A_1BD) , qua G kẻ đường thẳng song song với BD , cắt A_1B và A_1D lần lượt tại B' và D' .

Ta có:
$$\begin{cases} A_1C \perp AC' \\ A_1C \perp B'D' \end{cases} \Rightarrow A_1C \perp (Q) \Rightarrow AB'C'D' \text{ là thiết diện cần dựng.}$$

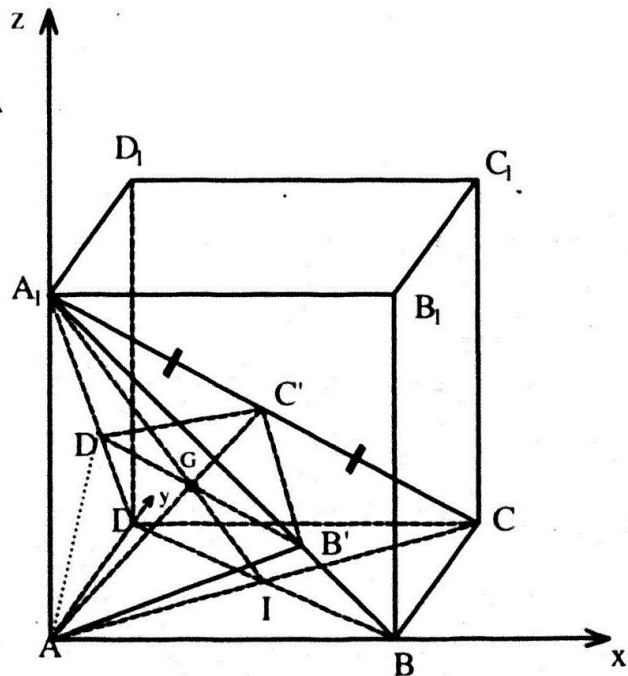
• **Tính diện tích thiết diện**

Ta có: $A_1C = \sqrt{2}A_1A = 2 \Rightarrow AC' = \frac{1}{2}A_1C = 1$

Mặt khác: $B'D' \parallel BD \Rightarrow \frac{B'D'}{BD} = \frac{A_1G}{A_1I} = \frac{\frac{2}{3}A_1I}{A_1I} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Ngoài ra:
$$\begin{cases} BD \perp AC' \\ B'D' \parallel BD \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp AC'$$

Do đó diện tích tứ giác $AB'C'D'$ là: $S = \frac{1}{2}AC' \cdot B'D' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.



Câu IV.

1. Tính thể tích của vật thể tròn xoay

Thể tích vật thể tròn xoay cần tìm là:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\pi} [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x dx - \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} x \cos 2x dx = \frac{\pi}{2} V_1 - \frac{\pi}{2} V_2 \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Tính } V_1 = \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\bullet \text{ Tính } V_2 = \int_0^{\pi} x \cos 2x dx. \text{ Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$V_2 = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin 2x dx = 0 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = 0$$

Vậy thể tích cần tìm là: $V = \frac{\pi^3}{4}$ (đvtt).

2. Tìm n

Số tập con gồm 3 phần tử và 7 phần tử của tập A (gồm n phần tử) lần lượt là: C_n^3, C_n^7 . Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow C_n^7 = 2C_n^3$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 7$)

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{7!(n-7)!} = 2 \cdot \frac{n!}{3!(n-3)!} \Leftrightarrow \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{1}{3(n-6)(n-5)(n-4)(n-3)}$$

$$\Leftrightarrow (n-6)(n-5)(n-4)(n-3) = 2.4.5.6.7 = 5.6.7.8 \Leftrightarrow n = 11$$

Vậy giá trị cần tìm là $n = 11$.

Câu V. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Ta có: $A = x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) - my = 1 - 4m \\ (x-1)m + y = 2m + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [(x-1) - my]^2 = (1-4m)^2 \\ [(x-1)m + y]^2 = (2m+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + m^2 y^2 - 2m(x-1)y = 16m^2 - 8m + 1 & (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 m^2 + y^2 + 2m(x-1)y = 4m^2 + 4m + 1 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta có: $(m^2 + 1)[(x-1)^2 + y^2] = 20m^2 - 4m + 2$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = \frac{20m^2 - 4m + 2}{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 - 1 = \frac{20m^2 - 4m + 2}{m^2 + 1} - 1$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{19m^2 - 4m + 1}{m^2 + 1}$$

Xét hàm số: $A = \frac{19m^2 - 4m + 1}{m^2 + 1}, m \in \mathbb{R}$

Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

$$A' = \frac{4(m^2 + 9m - 1)}{(m^2 + 1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-9 - \sqrt{85}}{2} \\ m = \frac{-9 + \sqrt{85}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

m	$-\infty$	$\frac{-9-\sqrt{85}}{2}$	$\frac{-9+\sqrt{85}}{2}$	$+\infty$	
A'	+	0	-	0	+
A	19	$10+\sqrt{85}$			19

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $\text{Max } A = 10 + \sqrt{85}$, khi $m = \frac{-9 - \sqrt{85}}{2}$.

Cách khác

Ta có: $A = \frac{19m^2 - 4m + 1}{m^2 + 1} \Leftrightarrow (A - 19)m^2 + 4m + A - 1 = 0 \quad (*)$

- Xét $A = 19$: Phương trình (*) có nghiệm $m = -\frac{9}{2}$.
- Xét $A \neq 19$: Phương trình (*) có nghiệm $m \Leftrightarrow \Delta' = 4 - (A - 19)(A - 1) \geq 0$
 $\Leftrightarrow A^2 - 20A + 15 \leq 0 \Leftrightarrow 10 - \sqrt{85} \leq A \leq 10 + \sqrt{85}, A \neq 19$

Từ hai trường hợp trên, suy ra (*) có nghiệm $m \Leftrightarrow 10 - \sqrt{85} \leq A \leq 10 + \sqrt{85}$.

Vậy $\text{max } A = 10 + \sqrt{85}$.

ĐỀ SỐ 25

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 4, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2$ (1) với m là tham số.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình $\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2} \cos$
2. Giải bất phương trình $\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \frac{2^{x-1} + 4x - 16}{x - 2} > 4$

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $I(-2; 0)$ và hai đường thẳng $d_1: 2x - y + 5 = 0$, $d_2: x + y - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm I và cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại A, B sao cho $\overline{IA} = 2\overline{IB}$.
2. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai điểm $A(4; 2; 2), B(0; 0; 7)$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$. Chứng minh rằng hai đường thẳng d và AB cùng thuộc một mặt phẳng. Tìm điểm C thuộc đường thẳng d sao cho tam giác ABC cân tại đỉnh A .
3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, góc $\widehat{ABC}$ bằng 120° . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x + x^3}$.
2. Biết rằng $(2+x)^{100} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k + \dots + a_{100}x^{100}$. Chứng minh rằng $a_2 < a_3$. Với giá trị nào của k ($0 \leq k \leq 99$) thì $a_k < a_{k+1}$?

Câu V. (1 điểm)

Cho hàm số $f(x) = e^x - \sin x + \frac{x^2}{2}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ và chứng minh rằng phương trình $f(x) = 3$ có đúng hai nghiệm.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số (1) khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có: $y = x^3 - 2x^2 + x - 2$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 4x + 1, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = -\frac{50}{27} \\ x = 1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y			$-\frac{50}{27}$		-2	

$-\infty \nearrow -\frac{50}{27} \searrow -2 \nearrow +\infty$

- Tính lồi, lõm và điểm uốn: $y'' = 6x - 4; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{52}{27}$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y''		0	
Đồ thị	lồi	Đ.U $I\left(\frac{2}{3}; -\frac{52}{27}\right)$	lõm

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = -2; y = 0 \Leftrightarrow x = 2$

- Đồ thị: Học sinh tự vẽ.

2. Tìm m để hàm số (1) đạt cực tiểu tại $x = 1$

$$y' = 3x^2 - 4mx + m^2; y'' = 6x - 4m$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 3$

- Với $m = 1: y'' = 6x - 4 \Rightarrow y''(1) = 2 > 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

- Với $m = 3: y'' = 6x - 12 \Rightarrow y''(1) = -6 < 0$

$\Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 1 \Rightarrow m = 3$ không thỏa.

Vậy giá trị cần tìm là $m = 1$.

Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có: } \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x} = 2(\cos x - \sin x) \\ \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 2\sin x \cos x (\cos x - \sin x) \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos x \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \sin 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$.

2. Giải bất phương trình:

Điều kiện: $x \neq 2$

$$\text{Ta có: } \frac{2^{x-1} + 4x - 16}{x-2} > 4 \Leftrightarrow \frac{2^{x-1} - 8}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} - 8 < 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^{x-1} - 8 > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x-1} < 8 \\ x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} 2^{x-1} > 8 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 3 \\ x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 > 3 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ x < 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x > 4 \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x < 2 \vee x > 4$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là: $x < 2 \vee x > 4$

Câu III.

1. Viết phương trình đường thẳng d

$$\text{Ta có: } A = d \cap d_1 \Rightarrow A(t_1; 2t_1 + 5); B = d \cap d_2 \Rightarrow B(t_2; 3 - t_2)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} = (t_1 + 2; 2t_1 + 5), \overrightarrow{IB} = (t_2 + 2; 3 - t_2)$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + 2 = 2(t_2 + 2) \\ 2t_1 + 5 = 2(3 - t_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 2t_2 = 2 \\ 2t_1 + 2t_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow A(1; 7)$$

$$\text{Đường thẳng d đi qua hai điểm A, I có phương trình: } \frac{x+2}{1+2} = \frac{y}{7} \Leftrightarrow 7x - 3y + 14 = 0$$

2.

• Chứng minh rằng hai đường thẳng d và AB đồng phẳng

d qua điểm $M(3; 6; 1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-2; 2; 1)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = (-4; -2; 5), \overrightarrow{AM} = (-1; 4; -1); [\overrightarrow{AB}, \vec{a}] = (-12; -6; -12).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \vec{a}] \cdot \overrightarrow{AM} = -12(-1) - 6 \cdot 4 - 12(-1) = 0$$

Vậy hai đường thẳng AB và d đồng phẳng.

• **Tìm điểm C thuộc d sao cho ΔABC cân tại A**

Phương trình tham số của đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 6 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Đặt $C(3 - 2t; 6 + 2t; 1 + t) \in d$

$$\Delta ABC \text{ cân tại A} \Leftrightarrow AB = AC \Leftrightarrow AC^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow (2t + 1)^2 + (2t + 4)^2 + (t - 1)^2 = 16 + 4 + 25$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow C(1; 8; 2) \\ t = -3 \Rightarrow C(9; 0; -2) \end{cases}$$

Vậy có hai điểm C cần tìm là: $C_1(1; 8; 2)$, $C_2(9; 0; -2)$.

3. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC).

Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên BC, ta có:

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI)$$

Mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SAI) \perp (SBC)$

theo giao tuyến SI.

Trong mặt phẳng (SAI), từ A kẻ $AH \perp SI$ thì $AH \perp (SBC)$

$$\Rightarrow AH = d(A, (SBC))$$

$$\Delta SAI \text{ vuông tại A, có: } \widehat{ABI} = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\Rightarrow AI = AB \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\Delta SAI \text{ vuông tại A, cho: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{2}.$$

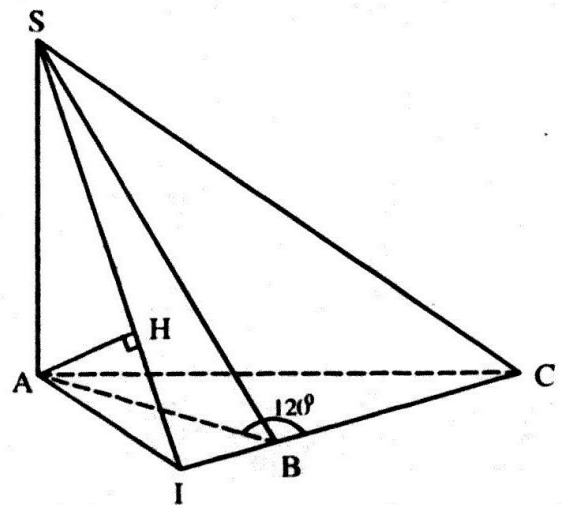
Cách khác

Áp dụng định lý côsin trong

ΔABC , ta có:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ \\ &= 8a^2 - 8a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 12a^2 \text{ (do } AB = BC) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AC = 2a\sqrt{3}.$$



Gọi I là trung điểm của AC
thì $BI \perp AC$ (do ΔABC
cân tại B)

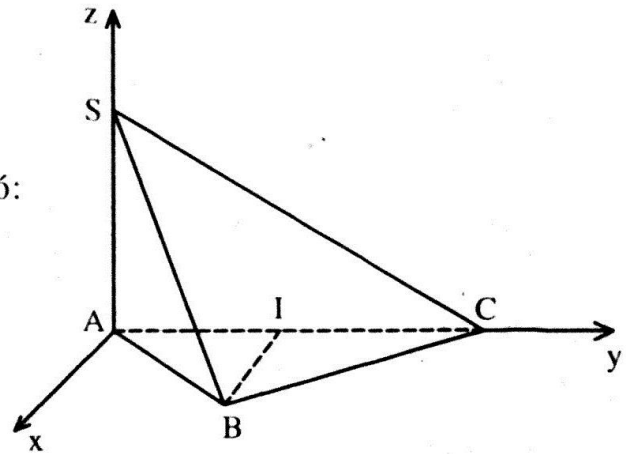
$$\Rightarrow BI = AB \sin 30^\circ = a$$

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có:

$$A(0;0;0), C(0;2a\sqrt{3};0), S(0;0;3a)$$

Tọa độ của B:

$$\begin{cases} x_B = \overline{IB} = a \\ y_B = \overline{IA} = a\sqrt{3} \Rightarrow B(a; a\sqrt{3}; 0) \\ z_B = 0 \end{cases}$$



Mặt phẳng (SBC) có cặp vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{SB} = (a; a\sqrt{3}; -3a)$, $\overrightarrow{SC} = (0; 2a\sqrt{3}; -3a)$

$$\Rightarrow Mp(SBC) \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = [\overrightarrow{SB}; \overrightarrow{SC}] = a^2\sqrt{3}(3; \sqrt{3}; 2)$$

Phương trình mặt phẳng (SBC) có dạng:

$$3(x-0) + \sqrt{3}(y-0) + 2(z-3a) = 0 \Leftrightarrow 3x + \sqrt{3}y + 2z - 6a = 0.$$

$$\text{Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là: } d(A, (SBC)) = \frac{|-6a|}{\sqrt{9+3+4}} = \frac{3a}{2}.$$

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x+x^3} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}(1+x^2) - x^2}{x(1+x^2)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left(\ln|x| - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| \right) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

2.

• **Chứng minh rằng** $a_2 < a_3$

$$\text{Xét nhị thức: } (2+x)^{100} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k 2^{100-k} \cdot x^k$$

$$\text{Ta có: } a_2 < a_3 \Leftrightarrow C_{100}^2 2^{98} < C_{100}^3 2^{97} \Leftrightarrow \frac{100!}{2!98!} \cdot 2^{98} < \frac{100!}{3!97!} \cdot 2^{97}$$

$$\Leftrightarrow 99 \cdot 100 \cdot 2^{97} < 98 \cdot 33 \cdot 100 \cdot 2^{96} \Leftrightarrow 3 < 49: \text{luôn luôn đúng.}$$

Vậy: $a_2 < a_3$ (dpcm).

• **Tìm** $k \in [0; 99]$ để $a_k < a_{k+1}$

$$\text{Ta có: } a_k = C_{100}^k 2^{100-k}, a_{k+1} = C_{100}^{k+1} 2^{99-k}$$

$$\text{Do đó: } a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow C_{100}^k 2^{100-k} < C_{100}^{k+1} 2^{99-k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{100!}{k!(100-k)!} \cdot 2^{100-k} < \frac{100!}{(k+1)!(99-k)!} \cdot 2^{99-k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{100-k} \cdot 2 < \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow 2(k+1) < 100-k \Leftrightarrow k < \frac{98}{3}$$

Mà $k \in [0; 99] \Rightarrow 0 \leq k \leq 32, k \in \mathbb{N}$.

Câu V. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 3$ có đúng hai nghiệm.

Xét hàm số: $f(x) = e^x - \sin x + \frac{x^2}{2}, x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = e^x - \cos x + x; f''(x) = e^x + \sin x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f'(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: $\begin{cases} f'(x) \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} \\ f'(0) = 0 \end{cases}$

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$		- 0 +	
$f'(x)$	$-\infty$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $\min y = 1$ và phương trình $f(x) = 3$ có đúng 2 nghiệm.

ĐỀ SỐ 26

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 5, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Tìm các điểm M thuộc (C) có khoảng cách đến đường thẳng $3x + 4y = 0$ bằng 1.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3}(\cos x + \cos 2x)$.
2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (x+1)\sqrt{1-x^2}$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x + y + 5 = 0$, $d_2: x + 2y - 7 = 0$ và điểm A(2; 3). Tìm điểm B thuộc d_1 và điểm C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC có trọng tâm là điểm G(2; 0).
2. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi Ax, By là hai nửa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và nằm về cùng một phía đối với mặt phẳng (ABCD). Hai điểm M và N lần lượt di động trên Ax và By sao cho tam giác CMN vuông tại M. Đặt AM = m, BN = n. Chứng minh rằng $m(n - m) = a^2$ và tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích hình thang ABNM theo a.
3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A(0;1;1) và đường thẳng $d: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm B(1;1;2) trên mặt phẳng (P).

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} e^{2x} dx$.
2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 4 chữ số đôi một khác nhau nhỏ hơn 2158?

Câu V. (1 điểm)

Xác định m để hệ sau có nghiệm $\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0 \end{cases}$.

GIẢI

âu I.

Khảo sát hàm số (1)

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$$

Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+		+	
y	1		$+\infty$	$-\infty$	1

Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Đồ thị: hình bên dưới

Tìm các điểm M thuộc (C) có khoảng cách đến đường thẳng $3x + 4y = 0$ bằng 1

Đặt $\Delta: 3x + 4y = 0$

$$M \in (C) \Rightarrow M\left(t; \frac{t}{t+1}\right)$$

ta có :

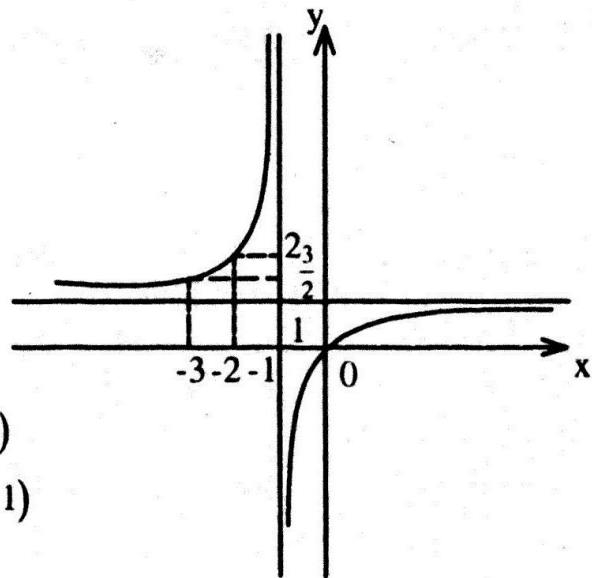
$$d(M, \Delta) = 1 \Leftrightarrow \frac{\left|3t + \frac{4t}{t+1}\right|}{5} = 1$$

$$\Rightarrow |3t^2 + 7t| = 5|t+1| \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 + 7t = 5(t+1) \\ 3t^2 + 7t = -5(t+1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3t^2 + 2t - 5 = 0 \\ 3t^2 + 12t + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \vee t = -\frac{5}{3} \\ t = \frac{-6 \pm \sqrt{21}}{3} \end{cases}$$

$$t = 1 \Rightarrow M_1\left(1; \frac{1}{2}\right)$$

$$t = -\frac{5}{3} \Rightarrow M_2\left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{2}\right)$$



$$\bullet \quad t = \frac{-6 + \sqrt{21}}{3} \Rightarrow M_3 \left(\frac{-6 + \sqrt{21}}{3}; \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \right)$$

$$\bullet \quad t = \frac{-6 - \sqrt{21}}{3} \Rightarrow M_4 \left(\frac{-6 - \sqrt{21}}{3}; \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \right)$$

Vậy có bốn điểm cần tìm là :

$$M_1 \left(1; \frac{1}{2} \right), M_2 \left(-\frac{5}{3}; \frac{5}{2} \right), M_3 \left(\frac{-6 + \sqrt{21}}{3}; \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \right), M_4 \left(\frac{-6 - \sqrt{21}}{3}; \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \right).$$

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có: $\sin x + \sin 2x = \sqrt{3} (\cos x + \cos 2x)$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\sqrt{3} \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} (\sqrt{3} \cos \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \sin \frac{3x}{2} = \sqrt{3} \cos \frac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0 \\ \operatorname{tg} \frac{3x}{2} = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{3} + l\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{9} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \pi + k2\pi \vee x = \frac{2\pi}{9} + l\frac{2\pi}{3} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$.

2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = (x+1)\sqrt{1-x^2}$

Miền xác định: $D = [-1; 1]$

$$y' = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (loại)} \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
y'		+	0
y	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

Từ bảng biến thiên ta thấy : $\min_{[-1;1]} y = 0$, khi $x = \pm 1$.

$$\max_{[-1;1]} y = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \text{ khi } x = \frac{1}{2}.$$

$$\begin{cases} m = \frac{a^2}{m} \\ m(n-m) = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ n = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

3.

- **Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với d** (d) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 1; -2)$

(P) qua A và vuông góc với (d) nên nhận $\vec{a}$ làm vectơ pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng :

$$-(x-0) + (y-1) - 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow x - y + 2z - 1 = 0.$$

- **Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của điểm B trên mặt phẳng (P)**

Gọi Δ là đường thẳng qua B và vuông góc với (P) thì Δ nhận $\vec{a}$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng Δ có dạng :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

H là hình chiếu vuông góc của B trên (P) nên $H = \Delta \cap (P)$

Tham số t ứng với tọa độ điểm H là nghiệm của phương trình :

$$1 - t - (1 + t) + 2(2 - 2t) - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Vậy $H\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 1\right)$.

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{e^x + 1} e^{2x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{e^x + 1} \Rightarrow t^2 = e^x + 1 \Rightarrow \begin{cases} e^x = t^2 - 1 \\ e^x dx = 2t dt \end{cases}$$

Đổi cận:

x	ln3	ln8
t	2	3

$$I = 2 \int_2^3 t(t^2 - 1) dt = 2 \int_2^3 (t^4 - t^2) dt = 2 \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{3} t^3 \right) \Big|_2^3 = \frac{1076}{15}.$$

2. Tìm số

Đặt $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Số cần tìm có dạng: $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ($a_1 \neq 0$)

- Xét các số dạng: $\overline{1 a_2 a_3 a_4}$

Chọn $a_4 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$: có 5 cách.

Chọn các chữ số a_2, a_3 thuộc $A \setminus \{1, a_4\}$: có A_8^2 cách. $\Rightarrow$ Có: $5 \cdot A_8^2 = 280$ (số).

Xét các số có dạng $\overline{20a_3a_4}$

Chọn $a_4 \in \{4, 6, 8\}$: có 3 cách.

Chọn $a_3 \in A \setminus \{0, 2, a_4\}$: có 7 cách $\Rightarrow$ Có : $3 \cdot 7 = 21$ (số).

Xét các số có dạng $\overline{210a_4}$

Chọn $a_4 \in \{4, 6, 8\}$: có 3 cách $\Rightarrow$ Có 3 (số).

Xét các số có dạng $\overline{213a_4}$

Chọn $a_4 \in \{0, 4, 6, 8\}$: có 4 cách $\Rightarrow$ Có 4 (số).

Xét các số dạng $\overline{214a_4}$

Chọn $a_4 \in \{0, 6, 8\}$: có 3 cách $\Rightarrow$ Có 3 (số).

Xét các số dạng $\overline{215a_4}$

Chọn $a_4 \in \{0, 4, 6\}$: có 3 cách $\Rightarrow$ Có 3 (số).

Vậy có tất cả: $280 + 21 + 3 + 4 + 3 + 3 = 314$ (số).

Câu V. Tìm m

$$\text{Xét } \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \leq 0 & (1) \\ 3x^2 - mx\sqrt{x} + 16 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 4. \text{ Đặt } t = \sqrt{x}, x \in [1; 4] \Rightarrow t \in [1; 2]$$

$$(2) \Leftrightarrow 3t^4 - mt^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow 3t^4 + 16 = mt^3 \Leftrightarrow 3t + \frac{16}{t^3} = m$$

Xét hàm số: $f(t) = 3t + \frac{16}{t^3}, t \in [1; 2]$

$$f'(t) = 3 - \frac{48}{t^4} = \frac{3(t^4 - 16)}{t^4} \Rightarrow f'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$$

Bảng biến thiên

t	1		2
$f'(t)$		-	0
$f(t)$	19		8

Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 8 \leq m \leq 19$.

ĐỀ SỐ 27

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 6, NĂM 2004

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + 1$ (m là tham số) (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) khi $m = 1$.
2. Chứng tỏ hàm số (C) luôn có cực đại và cực tiểu. Xác định các giá trị của m để hàm số (C) đạt cực đại và cực tiểu tại các điểm có hoành độ dương.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải bất phương trình sau: $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x$
2. Giải phương trình sau: $\sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$.

Câu III. (3 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxyz cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 2)$. Cho đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) có các phương trình như sau:

$$(d): \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}; \quad (P): 2x - y + z + 1 = 0.$$

1. Tìm tọa độ điểm C đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P).
2. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua điểm A, cắt đường thẳng (d) và song song với mặt phẳng (P).
3. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho tổng khoảng cách $(MA + MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân sau: $I = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$.
2. Tính diện tích giới hạn bởi các đường sau: $y = x^2 - 2x + 1$; $x = 0$ và $y = 2x - 2$.

Câu V. (1 điểm)

Giải phương trình sau: $3^x + 2^x = 3x + 2$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có: $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

• $y' = 3x^2 - 12x + 9$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 5 \\ x = 3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Tính lồi lõm và điểm uốn:

$$y'' = 6x - 12$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 3$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lồi	Đ. U $I(2;3)$	lõm

Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1$$

Đồ thị: hình bên

Chứng tỏ hàm số (C) luôn có cực đại và cực tiểu

$$y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3m(m+2)x + 1$$

$$y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m(m+2)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m(m+2) = 0 (*)$$

$$\Delta' = (m+1)^2 - m(m+2) = 1 > 0, \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình (*) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m.

Như vậy hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu với mọi m.

Xác định m để hàm số (C) đạt cực trị tại các điểm có hoành độ dương

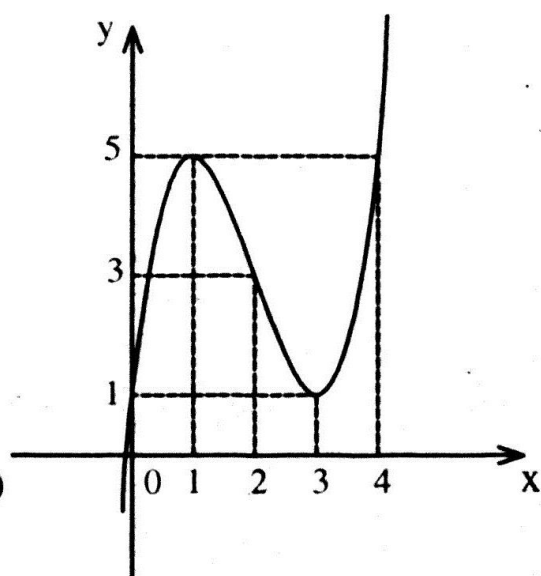
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} S = 2(m+1) > 0 \\ P = m(m+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \vee m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Cách khác:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m \\ x_2 = m+2 \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$



Câu II.

1. Giải bất phương trình

Ta có: $x^2 + \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 6 - 2x - x^2$

Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 4x + 3}, t \geq 0$

$$\Rightarrow t^2 = 2x^2 + 4x + 3 \Rightarrow -x^2 - 2x + 6 = \frac{1}{2}(15 - t^2)$$

$$\text{Ta được: } t \geq \frac{1}{2}(15 - t^2) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 15 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -5 \text{ (loại)} \\ t \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 4x + 3} \geq 3 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 3 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \vee x \geq 1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \leq -3 \vee x \geq 1$.

2. Giải phương trình

$$\text{Xét: } \sin 2x - 2\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 5 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), |t| \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$$

$$\text{Ta có: } t^2 - 2\sqrt{2}t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\sqrt{2} \\ t = 3\sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là: } x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu III.

1. Tìm tọa độ điểm C đối xứng với điểm A qua mặt phẳng (P)

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 1)$

Gọi (D) là đường thẳng qua A và vuông góc với (P) thì (D) nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương. Phương trình đường thẳng (D) có dạng:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $H = (D) \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$2(1 + 2t) - (2 - t) + 1 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

C đối xứng với A qua (P) nên H là trung điểm AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_H - x_A = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3} \\ y_C = 2y_H - y_A = \frac{14}{3} - 2 = \frac{8}{3} \\ z_C = 2z_H - z_A = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{1}{3}\right)$$

2. Viết phương trình đường thẳng (Δ)

Phương trình tham số của (d):

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$$

Gọi $I = \Delta \cap d \Rightarrow I(t; 2 - t; -2 + 4t) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = (t - 1; -t; -5 + 4t)$

$$\Delta // (P) \Rightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(t - 1) - t - 5 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{5} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{5}(2; -7; -11).$$

Đường thẳng Δ qua A và nhận $\vec{a} = 5\overrightarrow{AI} = (2; -7; -11)$ làm vectơ chỉ phương có

phương trình: $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z-1}{-11}$

3. Tìm $M \in (P)$ sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất

Đặt $f(x, y, z) = 2x - y + z + 1$

Ta có: $\begin{cases} f(A) = 2 \\ f(B) = 10 \end{cases} \Rightarrow f(A) \cdot f(B) > 0$

$\Rightarrow A, B$ nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P)

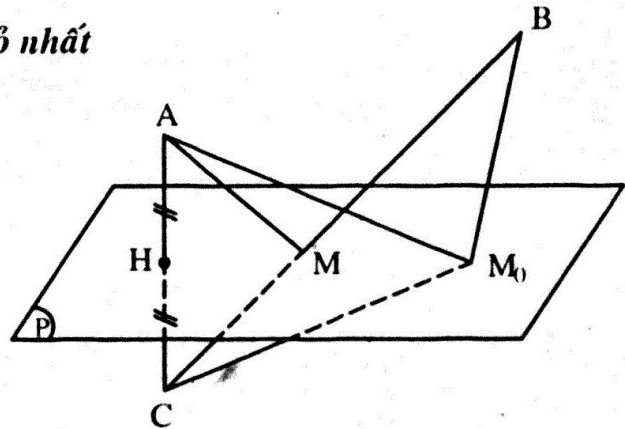
Giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (P) là điểm M cần tìm.

Thật vậy: Giả sử tồn tại trên (P) một điểm $M_0 \neq M$ thỏa yêu cầu bài toán, ta có: $M_0A + M_0B = M_0C + M_0C \geq BC$ (cố định) $\Rightarrow \min(M_0A + M_0B) = BC$, đạt được khi C, M_0, B thẳng hàng $\Leftrightarrow M_0 = BC \cap (P) \Rightarrow M_0 \equiv M$.

Đường thẳng BC qua B và nhận $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (-10; 11; -5)$ làm vectơ chỉ phương

có phương trình:

$$\begin{cases} x = 3 - 10t \\ y = -1 + 11t \\ z = 2 - 5t \end{cases}$$



Tham số t ứng với giao điểm $M = BC \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$2(3-10t) - (-1+11t) + 2 - 5t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{18} \Rightarrow M\left(\frac{2}{9}; \frac{37}{18}; \frac{11}{18}\right).$$

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1-x} \Rightarrow \begin{cases} x = 1-t^2 \\ dx = -2t dt \end{cases}$$

Đổi cận:

x	0	1
t	1	0

$$I = -2 \int_1^0 (1-t^2)t^2 dt = 2 \int_0^1 (-t^4 + t^2) dt = 2 \left(-\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{15}.$$

2. Tính diện tích hình phẳng

Đặt $(P): y = x^2 - 2x + 1$ và $(d): y = 2x - 2$

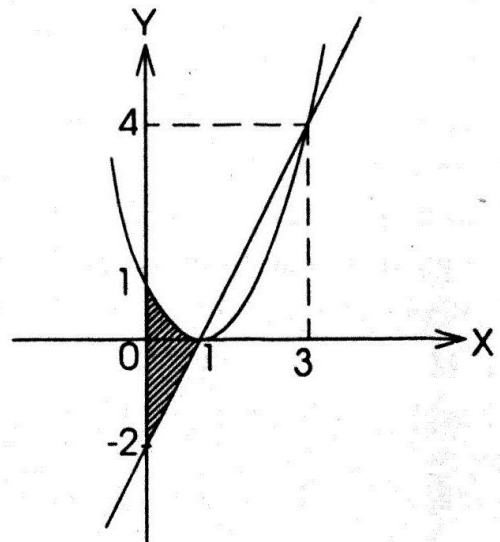
Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 - 2x + 1 = 2x - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta có diện tích cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [(x^2 - 2x + 1) - (2x - 2)] dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 \\ S &= \frac{4}{3} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$



Câu V. Giải phương trình

Ta có: $3^x + 2^x = 3x + 2$

$$\Leftrightarrow 3^x + 2^x - 3x - 2 = 0 \quad (1)$$

Nhận xét: $x = 0$; $x = 1$ là nghiệm của (1)

Xét hàm số:

$$f(x) = 3^x + 2^x - 3x - 2, x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 3$$

$$f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2^x \ln^2 2 > 0, \forall x$$

$\Rightarrow f'(x)$ là hàm số đồng biến $\forall x \in \mathbb{R}$

Mặt khác: $\begin{cases} f'(0) = \ln 6 - 3 < 0 \\ f'(1) = \ln 108 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0) \cdot f'(1) < 0$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có một nghiệm duy nhất $x_0 \in (0; 1)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	x_0	1	$+\infty$
$f'(x)$			$-$	0	$+$
$f(x)$					

Suy ra, phương trình $f(x) = 0$ chỉ có hai nghiệm: $x = 0$; $x = 1$.

ĐỀ SỐ 28

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI A, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$.
2. Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải bất phương trình : $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$.
2. Giải phương trình : $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $d_1 : x - y = 0$ và $d_2 : 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết rằng đỉnh A thuộc d_1 , đỉnh C thuộc d_2 và các đỉnh B, D thuộc trục hoành.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng:
 $d : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P) : $2x + y - 2z + 9 = 0$.
 - a) Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) bằng 2.
 - b) Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P). Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), biết Δ đi qua A và vuông góc với d.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$.
2. Tìm số nguyên dương n sao cho
 $C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$
(C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V. (1 điểm).

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$.

Chứng minh rằng : $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = \frac{1}{4}$

Khi $m = \frac{1}{4}$, ta có: $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{x}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $y' = \frac{1}{4} - \frac{1}{x^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

- Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty \Rightarrow x = 0$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$ là tiệm cận xiên

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$		-1		$+\infty$		1	$+\infty$

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y \in \emptyset$; $y = 0 \Rightarrow x \in \emptyset$
- Đồ thị :

2. Tìm m

$$y = mx + \frac{1}{x}$$

$$y' = m - \frac{1}{x^2} = \frac{mx^2 - 1}{x^2}$$

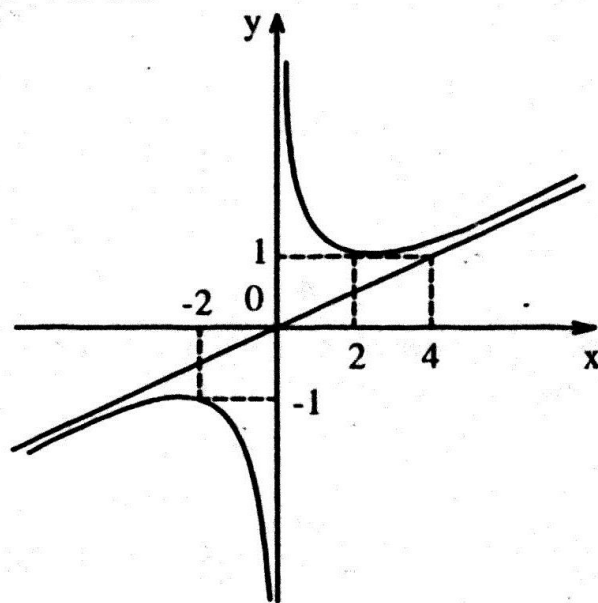
$$y' = 0 \Leftrightarrow mx^2 - 1 = 0 \quad (1)$$

Hàm số (x) có cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 và y' đổi dấu khi x qua 2

$$\text{nghiệm đó} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó :

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y = -2\sqrt{m} \\ x = \frac{1}{\sqrt{m}} \Rightarrow y = 2\sqrt{m} \end{cases}$$



Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{m}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{m}}$	$+\infty$	
y'		+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$		$-2\sqrt{m}$		$+\infty$		$2\sqrt{m}$	$+\infty$

Tọa độ điểm cực tiểu : $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$

Đồ thị hàm số (*) có tiệm cận xiên : $\Delta: y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow d(A, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\frac{m}{\sqrt{m}} - 2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2m = m^2 + 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \quad (m > 0)$$

Vậy giá trị cần tìm là : $m = 1$.

Câu II.

1. Giải bất phương trình.

Ta có: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4} < \sqrt{5x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{(x-1)(2x-4)} < x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-1)(2x-4) < (x+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 10x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x < 10 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x < 10$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $2 \leq x < 10$.

2. Giải phương trình

Ta có: $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 + \cos 6x}{2}\right) \cos 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 2x = 1 \\ \cos^2 2x = -\frac{1}{4} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Câu III.

Đặt $A(a; a) \in d_1$

Do ABCD là hình vuông và B, D thuộc trục Ox nên C đối xứng với A qua Ox $\Rightarrow C(a; -a)$

Mặt khác: $C \in d_2 \Rightarrow 2a - a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

$\Rightarrow A(1; 1), C(1; -1) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (0; -2)$

Đặt $B(b; 0), D(d; 0) \in Ox$

Gọi I là trung điểm AC thì $I(1; 0)$

Ta có: $IA = IB = ID = 1$

$$\Leftrightarrow |b - 1| = |d - 1| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \vee b = 2 \\ d = 0 \vee d = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(0; 0), D(2; 0)$ hay $B(2; 0), D(0; 0)$.

Vậy các đỉnh hình vuông là:

$A(1; 1), B(0; 0), C(1; -1), D(2; 0)$ hay $A(1; 1), B(2; 0), C(1; -1), D(0; 0)$.

2. a) Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến (P) bằng 2

Phương trình tham số của đường thẳng d:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

$I \in d \Rightarrow I(1 - t; -3 + 2t; 3 + t)$

Ta có: $d(I, (P)) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{|2(1 - t) + (-3 + 2t) - 2(3 + t) + 9|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 2 \Leftrightarrow |1 - t| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = 3 \\ 1 - t = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \Rightarrow I_1(3; -7; 1) \\ t = 4 \Rightarrow I_2(-3; 5; 7) \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là: $I_1(3; -7; 1), I_2(-3; 5; 7)$.

b)

• **Tìm tọa độ giao điểm A của đường thẳng d và mặt phẳng (P)**

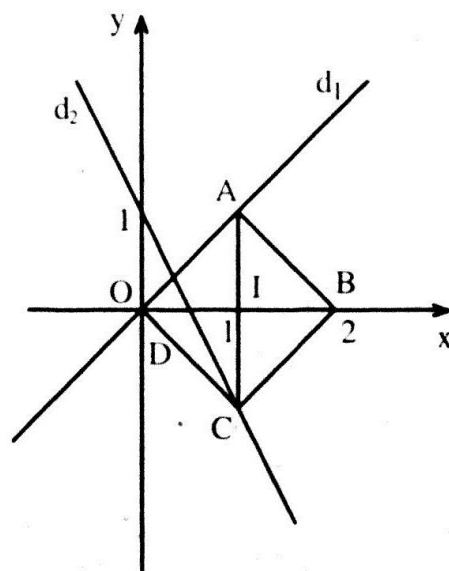
Tham số t ứng với giao điểm $A = d \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$2(1 - t) + (-3 + 2t) - 2(3 + t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow A(0; -1; 4).$$

• **Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ**

d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 2; 1)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1; -2)$



Gọi $\vec{b}$ là vectơ chỉ phương của Δ

Ta có: $\begin{cases} \Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{n} \\ \Delta \perp d \Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \end{cases} \Rightarrow \vec{b} = [\vec{n}, \vec{a}] = 5(1; 0; 1)$

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{b}$ có dạng:

$$\begin{cases} x = t' \\ y = -1 \\ z = 4 + t' \end{cases}$$

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos x + 1}{\sqrt{1 + 3\cos x}} \sin x dx$$

Đặt $t = \sqrt{1 + 3\cos x} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{3}(t^2 - 1) \\ \sin x dx = -\frac{2}{3}t dt \end{cases}$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	2	1

$$I = -\frac{2}{3} \int_2^1 \frac{\frac{2}{3}(t^2 - 1) + 1}{t} t dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{2}{9} \left(\frac{2}{3}t^3 + t \right) \Big|_1^2$$

$$I = \frac{34}{27}$$

2. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + xC_{2n+1}^1 + x^2C_{2n+1}^2 + x^3C_{2n+1}^3 + \dots + x^{2n+1}C_{2n+1}^{2n+1}$

Lấy đạo hàm hai vế ta có:

$$(2n+1)(1+x)^{2n} = C_{2n+1}^1 + 2xC_{2n+1}^2 + 3x^2C_{2n+1}^3 + \dots + (2n+1)x^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1)$$

Thế $x = -2$ vào (1), ta được:

$$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} \quad (2)$$

Theo giả thiết, ta có: $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

Vậy giá trị cần tìm là: $n = 1002$.

Vấn đề V. Chứng minh bất đẳng thức

Cho $a > 0, b > 0$ ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq \frac{1}{a+b}$$

Do đó:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2z} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \right] = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right) \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \quad (\text{đpcm}).$$

Bất đẳng thức xảy ra khi: $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Cách khác

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$2x+y+z = x+x+y+z \geq 4\sqrt[4]{x \cdot x \cdot y \cdot z}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Do đó:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x \cdot x \cdot y \cdot z}} = \frac{1}{4} \sqrt[4]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (1)$$

Tương tự:

$$\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x \cdot y \cdot y \cdot z}} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x \cdot y \cdot z \cdot z}} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right) \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1 \quad (\text{đpcm}).$$

Bất đẳng thức xảy ra khi: $x = y = z = \frac{4}{3}$.

ĐỀ SỐ 29

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI B, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$ (*) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 1$.
2. Chứng minh rằng với m bất kỳ, đồ thị (C_m) luôn luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$
2. Giải phương trình : $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mp với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm A(2; 0) và B(6; 4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và khoảng cách từ tâm của (C) đến điểm B bằng 5.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng ABC.A₁B₁C₁ với A(0; -3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0) và B₁(4; 0; 4).
 - a) Tìm tọa độ các đỉnh A₁, C₁. Viết phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC₁B₁).
 - b) Gọi M là trung điểm A₁B₁. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, M và song song với BC₁. Mặt phẳng (P) cắt đường thẳng A₁C₁ tại điểm N. Tính độ dài đoạn MN.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$.
2. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người, gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

Câu V. (1 điểm)

Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Khi nào đẳng thức xảy ra?

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 1$.

Khi $m = 1$, ta có: $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$

• Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

• Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

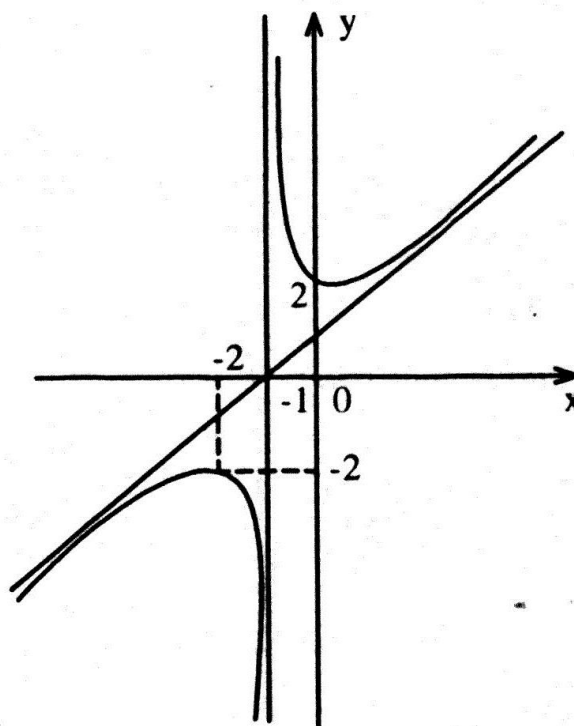
$\begin{cases} y = x + 1 + \frac{1}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x + 1$ là tiệm cận xiên

• Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

• Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = 2$

• Đồ thị :



2. Chứng minh

$$y = \frac{x^2 + (m + 1)x + m + 1}{x + 1}$$

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = m - 3 \\ x = 0 \Rightarrow y = m + 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1		0	$+\infty$	
y'	+	0	-		-	0	+
y	$\nearrow$ $-\infty$			$m-3$ CD	$\nwarrow$ $+\infty$		
			$-\infty$		$m+1$ CT	$\nearrow$ $+\infty$	

$\Rightarrow$ Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

Tọa độ hai điểm cực trị là : A(-2; m - 3), B(0; m+1).

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là:

$$AB = \sqrt{(0-2)^2 + (m-1-m+3)^2} = \sqrt{20} \text{ (dpcm)}.$$

Câu II.

1. Giải hệ phương trình

$$\text{Xét } \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 & (1) \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 2 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x \geq 1 \\ 0 < y \leq 2 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 3\log_3 3x - 3\log_3 y = 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3x = \log_3 y + 1 = \log_3 3y \Leftrightarrow 3x = 3y \Leftrightarrow x = y$$

Thế $y = x$ vào (1), ta có: $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ x-1+2-x+2\sqrt{(x-1)(2-x)} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{(x-1)(2-x)} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=y=2 \end{cases}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là: $x = y = 1 \vee x = y = 2$.

2. Giải phương trình

$$\text{Ta có: } 1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + (\sin 2x + 1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + (2\sin x \cos x + 2\cos^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) + 2\cos x(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\cos x \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{4} + l\pi \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu III.

1. Viết phương trình đường tròn (C)

Gọi $I(a; b)$, R lần lượt là tâm và bán kính của (C)

(C) tiếp xúc với trục Ox tại A nên ta có $a = 2$ và $R = |b|$

Mặt khác: $IB = 5 \Leftrightarrow IB^2 = 25 \Leftrightarrow (6-a)^2 + (4-b)^2 = 25$

$$\Leftrightarrow (6-2)^2 + (4-b)^2 = 25 \Leftrightarrow (4-b)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-b=3 \\ 4-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \Rightarrow I(2;1), R=1 \\ b=7 \Rightarrow I(2;7), R=7 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn cần tìm: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$.

2. a)

- **Tìm tọa độ các đỉnh A_1, C_1**

ABB_1A_1 là hình chữ nhật nên ta có: $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} \Rightarrow A_1(0; -3; 4)$

Tương tự, ta có: $C_1(0; 3; 4)$.

- **Viết phương trình mặt cầu tâm A và tiếp xúc với (BCC_1B_1)**

Mp (BCC_1B_1) có cặp vectơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0); \overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4)$$

$\Rightarrow (BCC_1B_1)$ có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = 4(3; 4; 0)$$

Phương trình mặt phẳng (BCC_1B_1) có dạng:

$$3(x-4) + 4y = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0.$$

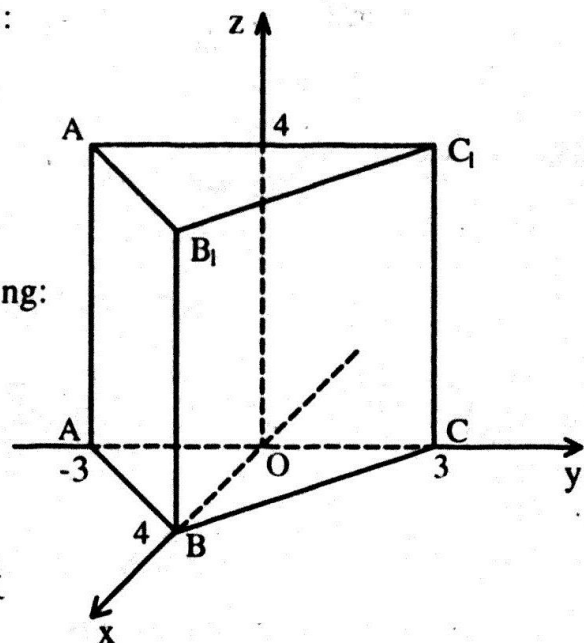
Gọi (S) là mặt cầu cần tìm

(S) tiếp xúc với mặt phẳng (BCC_1B_1)

nên có bán kính:

$$R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|0 - 12 - 12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{24}{5}$$

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + (y-3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$.



b)

- **Viết phương trình mặt phẳng (P)**

M là trung điểm của A_1B_1 nên $M\left(2; -\frac{3}{2}; 4\right)$

(P) có cặp vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{AM} = \left(2; \frac{3}{2}; 4\right)$, $\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 4)$

$\Rightarrow (P)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BC}] = -6(1; 4; -2)$

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$x + 4(y + 3) - 2z = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0.$$

- **Tính độ dài đoạn MN**

A_1C_1 nhận $\overrightarrow{A_1C_1} = 6(0; 1; 0)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + t \\ z = 4 \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $N = A_1C_1 \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$0 + 4(-3 + t) - 8 + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow N(0; -1; 4)$$

Độ dài đoạn MN là: $MN = \sqrt{(0-2)^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}\right)^2 + (4-4)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$

Câu IV.

1. Tính tích phân

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} \sin x dx$

Đặt $t = 1 + \cos x \Rightarrow \begin{cases} \cos x = t - 1 \\ \sin x dx = -dt \end{cases}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	2	1

$$I = -2 \int_2^1 \frac{(t-1)^2}{t} dt = 2 \int_1^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) dt = 2 \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \ln|t|\right) \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - 1.$$

2. Tìm số cách chọn

- Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất : Có $C_{12}^4 \cdot C_3^1 = 1485$ cách.
 - Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ hai : Có $C_8^4 \cdot C_2^1 = 140$ cách.
 - Chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ ba : Có 1 cách.
- Vậy có tất cả : $1485 \times 140 \times 1 = 207.900$ (cách).

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\bullet \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^x} = 2 \cdot 3^x \quad (1)$$

$$\bullet \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{20}{3}\right)^x} = 2 \cdot 5^x \quad (2)$$

$$\bullet \left(\frac{20}{3}\right)^x + \left(\frac{12}{5}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{20}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^x} = 2 \cdot 4^x \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x \text{ (dpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi: $\left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x = \left(\frac{20}{3}\right)^x \Leftrightarrow x = 0.$

ĐỀ SỐ 30

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI D, NĂM 2005

Câu I (2 điểm)

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 2$.
2. Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Câu II (2 điểm). Giải các phương trình sau:

1. $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$.
2. $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$.

Câu III (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) , biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ và } d_2: \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả hai đường thẳng d_1 và d_2 .

b) Mặt phẳng tọa độ Oxz cắt hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt tại các điểm A

B . Tính diện tích tam giác OAB (O là gốc tọa độ).

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx$.

2. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}$, biết rằng

$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149$ (n là số nguyên dương, A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử và C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V (1 điểm)

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}. \text{ Khi nào đẳng thức xảy ra?}$$

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 2$

Khi $m = 2$, ta có: $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

- $y' = x^2 - 2x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \\ x = 2 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y		$-\infty$	$\frac{1}{3}$	-1	$+\infty$	

- Tính lồi lõm và điểm uốn:

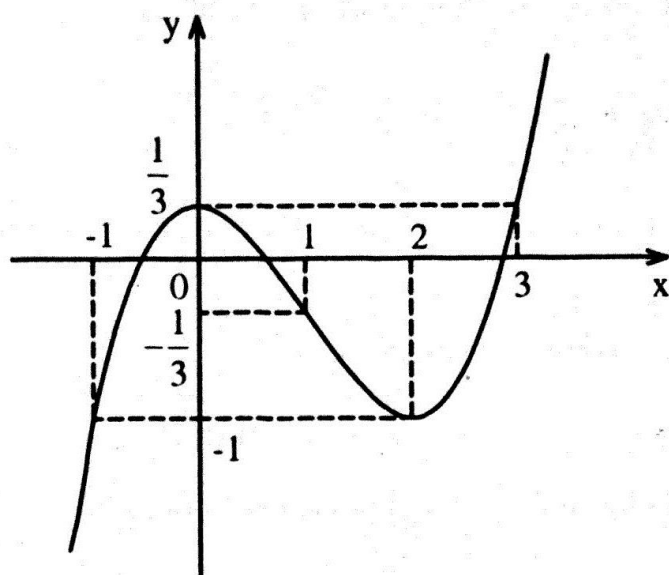
$$y'' = 2x - 2$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lồi	Đ.U $I\left(1; -\frac{1}{3}\right)$	lõm

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}$

- Đồ thị:



2. Tìm m

Đặt $M(x_0; y_0) \in (C_m)$, ta có:

$$x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -\frac{m}{2}$$

$$y' = x^2 - mx \Rightarrow y'(x_0) = m + 1$$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại điểm M có dạng:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y + \frac{m}{2} = (m + 1)(x + 1) \Leftrightarrow y = (m + 1)x + \frac{1}{2}(m + 2)$$

Δ song song với đường thẳng $5x - y = 0$ hay $y = 5x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 = 5 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4. \text{ Vậy giá trị cần tìm là: } m = 4.$$

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $x \geq -1$. Đặt $t = \sqrt{x+1}$ ($t \geq 0$) $\Rightarrow x = t^2 - 1$

Ta có: $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{t^2 + 2t + 1} - t = 4 \Leftrightarrow 2(t + 1) - t = 4 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x = 3.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là: $x = 3$.

2. Giải phương trình

Ta có: $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \frac{1}{2}\left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}(\sin 2x - \cos 4x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}(\sin 2x + 2\sin^2 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu III.

1. Tìm tọa độ các điểm A, B

Đặt $A(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \quad (1) \text{ (do } A \neq C \Rightarrow x_0 \neq 2)$

Do A, B đối xứng nhau qua Ox nên ta có $B(x_0, -y_0)$

$$\Delta ABC \text{ đều} \Leftrightarrow CA = CB = AB \Leftrightarrow CA^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 + y_0^2 = 4y_0^2 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{1}{3}(x_0 - 2)^2 \quad (2)$$

Thế (2) vào (1), ta được: $\frac{x_0^2}{4} + \frac{1}{3}(x_0 - 2)^2 = 1 \Leftrightarrow 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \text{ (loại)} \\ x_0 = \frac{2}{7} \Rightarrow y_0 = \pm \frac{4\sqrt{3}}{7} \end{cases}$$

Vậy tọa độ của A và B là:

$$A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ hay } A\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right), B\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

2. a)

• **Chứng minh rằng d_1 và d_2 song song với nhau**

d_1 qua điểm $M(1; -2; -1)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{a} = (3; -1; 2)$

d_2 qua điểm $N(12; 0; 10)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{b} = (3; -1; 2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (11; 2; 11)$$

Ta có: $\begin{cases} \vec{a} = \vec{b} = (3; -1; 2) \\ 3 : -1 : 2 \neq 11 : 2 : 11 \Rightarrow \vec{a}, \overrightarrow{MN} \text{ không cùng phương} \end{cases}$

Vậy $d_1 \parallel d_2$ (đpcm).

• **Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và d_2**

(P) chứa d_2 nên có phương trình:

$$m(x + y - z - 2) + n(x + 3y - 12) = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (m + n)x + (m + 3n)y - mz - 2m - 12n = 0$$

$$d_1 \subset (P) \Rightarrow M \in (P) \Leftrightarrow 2m + 17n = 0 : \text{ chọn } m = 17, n = -2$$

$$\Rightarrow (P): 15x + 11y - 17z - 10 = 0.$$

b) **Tính diện tích tam giác OAB**

Đặt $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$. Ta có: $A, B \in (Oxz) \Rightarrow y_1 = y_2 = 0$

Mặt khác: $A \in d_1 \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{3} = \frac{2}{-1} = \frac{z_1 + 1}{2} \Leftrightarrow x_1 = z_1 = -5 \Rightarrow A(-5; 0; -5)$

$$B \in d_2 \Rightarrow \begin{cases} x_2 - z_2 - 2 = 0 \\ x_2 - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 12 \\ z_2 = 10 \end{cases} \Rightarrow B(12; 0; 10) \Rightarrow [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = (0; -10; 0)$$

Diện tích ΔOAB là: $S = \frac{1}{2} \left\| [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] \right\| = 5.$

Câu IV.**1. Tính tích phân**

Ta có:
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) dx = e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= e - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

2. Tính giá trị của biểu thức M

Ta có: $C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + C_{n+4}^2 + 2C_{n+3}^2 = 149 \quad (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} + 2 \frac{(n+2)!}{2!n!} + \frac{(n+4)!}{2!(n+2)!} + 2 \frac{(n+3)!}{2!(n+1)!} = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1)(n+2) + \frac{1}{2}(n+3)(n+4) + (n+2)(n+3) = 149$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} n = -9 \text{ (loại)} \\ n = 5 \end{cases}$$

Với $n = 5$, ta có: $M = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{(5+1)!} = \frac{6! + 3 \cdot 3!}{6!} = \frac{3}{4}.$

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Đặt $P = \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $1+x^3+y^3 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \quad (1)$$

Tương tự: $\frac{1+y^3+z^3}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}} \quad (2)$

$$\frac{1+x^3+z^3}{xz} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xz}} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có: $P \geq \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right)$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = 3 \quad (\text{do } xyz = 1)$$

Suy ra: $P \geq 3\sqrt{3}$ (đpcm). Đẳng thức xảy ra khi: $x = y = z = 1.$

ĐỀ SỐ 31

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số : $y = -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1$ (1) (m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với đường thẳng $y = 2mx - m - 1$.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải bất phương trình : $\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2}$.
2. Giải phương trình : $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0.$$

Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$ sao cho $MI = 2R$, trong đó I là tâm và R là bán kính của đường tròn (C) .

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho lăng trụ đứng $OAB.O_1A_1B_1$ với $A(2;0;0)$, $B(0;4;0)$, $O_1(0;0;4)$.

a) Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1 . Viết phương trình mặt cầu qua bốn điểm O, A, B, O_1 .

b) Gọi M là trung điểm của AB . Mặt phẳng (P) qua M vuông góc với O_1A và cắt OA, AA_1 lần lượt tại N, K . Tính độ dài đoạn KN .

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân : $I = \int_1^3 \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$.

2. Tìm $k \in \{0, 1, 2, \dots, 2005\}$ sao cho C_{2005}^k đạt giá trị lớn nhất. (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V. (1 điểm)

Tìm m để hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2005x \leq 2005 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \geq 0 \end{cases}$$

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có : $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

- $y' = -3x^2 + 6x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-2		2		$-\infty$

- Tính lồi lõm và điểm uốn: $y'' = -6x + 6$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		+	0	-	
Đồ thị		lõm	Đ. U $I(1;0)$	lồi	

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = -2$; $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$; $x = 1 \pm \sqrt{3}$

- Đồ thị: hình dưới

2. Tìm m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với đường thẳng: $y = 2mx - m - 1$

Đặt (d): $y = 2mx - m - 1$ (C_m) tiếp xúc

với đường thẳng (d)

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm :

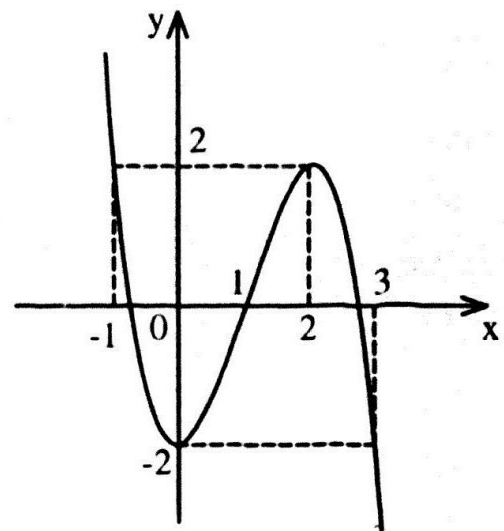
$$\begin{cases} -x^3 + (2m+1)x^2 - m - 1 = 2mx - m - 1 & (1) \\ -3x^2 + 2(2m+1)x = 2m & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x[x^2 - (2m+1)x + 2m] = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x-2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2m \end{cases}$$

- Với $x = 0$: (2) $\Leftrightarrow m = 0$

- Với $x = 1$: (2) $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$



• Với $x = 2m$: $(2) \Leftrightarrow 2m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \frac{1}{2}$

Vậy có hai giá trị cần tìm là: $m = 0$; $m = \frac{1}{2}$.

Câu II.

1. Giải bất phương trình

Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x + 7 \geq 0 \\ 5 - x \geq 0 \\ 3x - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 5$$

Ta có: $\sqrt{2x+7} - \sqrt{5-x} \geq \sqrt{3x-2} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{5-x} \leq \sqrt{2x+7}$
 $\Leftrightarrow 3x-2+5-x+2\sqrt{(3x-2)(5-x)} \leq 2x+7 \Leftrightarrow \sqrt{(3x-2)(5-x)} \leq 2$
 $\Leftrightarrow (3x-2)(5-x) \leq 4 \Leftrightarrow 3x^2 - 17x + 14 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq \frac{14}{3} \end{cases}$

So với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là: $\frac{2}{3} \leq x \leq 1 \vee \frac{14}{3} \leq x \leq 5$.

2. Giải phương trình

Điều kiện:
$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có: $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \Leftrightarrow \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2$
 $\Leftrightarrow \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \sin x (1 + \cos x) \Leftrightarrow \cos x + 1 = 2 \sin x (\cos x + 1)$
 $\Leftrightarrow 2 \sin x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu III.

1. Tìm tọa độ điểm M

(C) có tâm I(2; 3) và bán kính R = 5; $M \in (d) \Rightarrow M(t; 2t+3)$

Ta có: $IM = 2R = 10 \Leftrightarrow IM^2 = 100 \Leftrightarrow (t-2)^2 + 4t^2 = 100$

$$\Leftrightarrow 5t^2 - 4t - 96 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \Rightarrow M(-4; -5) \\ t = \frac{24}{5} \Rightarrow M\left(\frac{24}{5}; \frac{63}{5}\right) \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M(-4; -5)$; $M\left(\frac{24}{5}; \frac{63}{5}\right)$.

2. • Tìm tọa độ các điểm A_1, B_1

Vì $AA_1 \perp (Oxy) \Rightarrow A_1(2; 0; 4); BB_1 \perp (Oxy) \Rightarrow B_1(0; 4; 4)$

• Viết phương trình mặt cầu qua bốn điểm O, A, B, O_1

Giả sử phương trình mặt cầu (S) cần tìm có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

Ta có: $O \in (S) \Rightarrow d = 0$

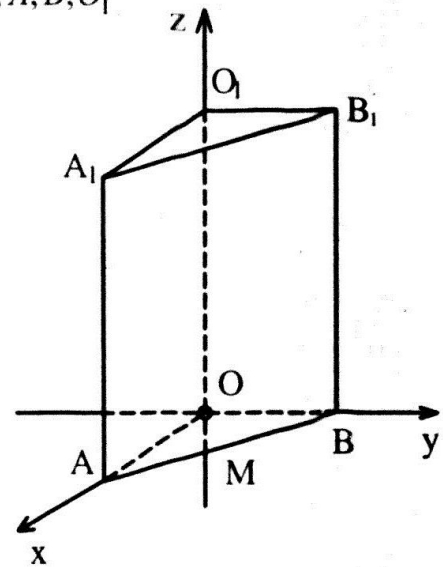
$$A \in (S) \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

$$B \in (S) \Rightarrow 16 - 8b = 0 \Leftrightarrow b = 2$$

$$O_1 \in (S) \Rightarrow 16 - 8c = 0 \Leftrightarrow c = 2$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) có dạng:

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4z = 0.$$



b) Tính độ dài đoạn KN

M là trung điểm của AB nên $M(1; 2; 0); \overrightarrow{O_1A} = (2; 0; -4)$

(P) qua M và vuông góc O_1A nên nhận $\overrightarrow{O_1A} = 2(1; 0; -2)$ làm vectơ pháp tuyến

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng :

$$1.(x-1) + 0.(y-2) - 2.(z-0) = 0 \Leftrightarrow x - 2z - 1 = 0$$

$N = (P) \cap OA \equiv Ox \Rightarrow N(1; 0; 0)$. AA_1 qua A và nhận $\vec{j} = (0; 0; 1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình tham số :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $K = (P) \cap AA_1$ là nghiệm của phương trình:

$$2 - 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(2; 0; \frac{1}{2}\right)$$

Độ dài đoạn KN là: $KN = \sqrt{(1-2)^2 + (0-0)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Câu IV.

1. Tính tích phân :

$$I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x \sqrt{\ln x + 1}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{\ln x + 1} \Rightarrow t^2 = \ln x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln x = t^2 - 1 \\ \frac{dx}{x} = 2t dt \end{cases}$$

Đổi cận : $\frac{x}{t} \left| \begin{array}{cc} 1 & e^3 \\ 1 & 2 \end{array} \right.$

$$I = \int_1^2 \frac{(t^2 - 1)^2}{t} 2tdt = 2 \int_1^2 (t^2 - 1)^2 dt$$

$$= 2 \int_1^2 (t^4 - 2t^2 + 1) dt = 2 \left(\frac{1}{5} t^5 - \frac{2}{3} t^3 + t \right) \Big|_1^2 \Rightarrow I = \frac{76}{15}.$$

2. Tìm k sao cho C_{2005}^k đạt giá trị lớn nhất

Xét dãy số : $C_{2005}^0, C_{2005}^1, C_{2005}^2, \dots, C_{2005}^{k-1}, C_{2005}^k, C_{2005}^{k+1}, \dots, C_{2005}^{2005}$

$$\text{Số } C_{2005}^k \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{2005}^k \geq C_{2005}^{k-1} \\ C_{2005}^k \geq C_{2005}^{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2005!}{k!(2005-k)!} \geq \frac{2005!}{(k-1)!(2006-k)!} \\ \frac{2005!}{k!(2005-k)!} \geq \frac{2005!}{(k+1)!(2004-k)!} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2006-k} \\ \frac{1}{2005-k} \geq \frac{1}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2006-k \geq k \\ k+1 \geq 2005-k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \leq 1003 \\ k \geq 1002 \end{cases} \Leftrightarrow 1002 \leq k \leq 1003$$

Vậy giá trị cần tìm là : $k = 1002 \vee k = 1003$.

Câu V. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2005x \leq 2005 & (1) \\ x^2 - (m+2)x + 2m+3 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x \geq -1$

$$(1) \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} \leq 2005(1-x)$$

- Xét $x > 1$, ta có: $\begin{cases} 2x > 2 \\ 1-x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{x+1} > 2+\sqrt{x+1} \\ 1-x < 0 \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} > 0 \\ 1-x < 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1$ bất phương trình (1) vô nghiệm.

- Xét $-1 \leq x \leq 1$, ta có:

$$\begin{cases} 2x \leq 2 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{x+1} \leq 2+\sqrt{x+1} \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} \leq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in [-1; 1]$ bất phương trình (1) luôn luôn đúng.

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ là nghiệm của bất phương trình (1).

Ta cần định m để bất phương trình (2) có nghiệm $x \in [-1; 1]$

$$(2) \Leftrightarrow (x-2)m \leq x^2 - 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2} \quad (\text{do } x-2 < 0, \forall x \in [-1; 1])$$

Xét hàm số: $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-2}, x \in [-1; 1]$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{3} \in [-1; 1] \\ x = 2 + \sqrt{3} \notin [-1; 1] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-1	$2 - \sqrt{3}$	1
$f'(x)$		+	0
$f(x)$		$2 - 2\sqrt{3}$	

$-2 \xrightarrow{\quad} 2 - 2\sqrt{3} \xrightarrow{\quad} -2$

Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq -2$.

ĐỀ SỐ 32

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$.
2. Tìm m để phương trình : $\frac{x^2 + 3x + 3}{|x + 1|} = m$ có bốn nghiệm phân biệt.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải bất phương trình : $9^{x^2 - 2x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x - x^2} \leq 3$.
2. Giải phương trình: $\sin 2x + \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 2 = 0$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai điểm $A(0;5), B(2;3)$. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A, B và có bán kính R bằng $\sqrt{10}$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với $A(0;0;0), B(2;0;0), D_1(0;2;2)$.
 - a) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.
Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) vuông góc với nhau.
 - b) Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ điểm N thuộc đường thẳng AC_1 ($N \neq A$) tới hai mặt phẳng (AB_1D_1) và (AMB_1) không phụ thuộc vào vị trí của điểm N.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos^2 x dx$.
2. Tìm số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn đẳng thức : $2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12$.
(P_n là số hoán vị của n phần tử và A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử).

Câu V. (1 điểm)

Cho x, y, z là ba số dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}.$$

GIẢI

Câu 1.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} = x + 2 + \frac{1}{x + 1}$

• Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

• Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x + 2 + \frac{1}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x + 2 \text{ là tiệm cận xiên}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$				
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$+\infty$

• Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 3$

• Đồ thị:

2. **Tìm m.**

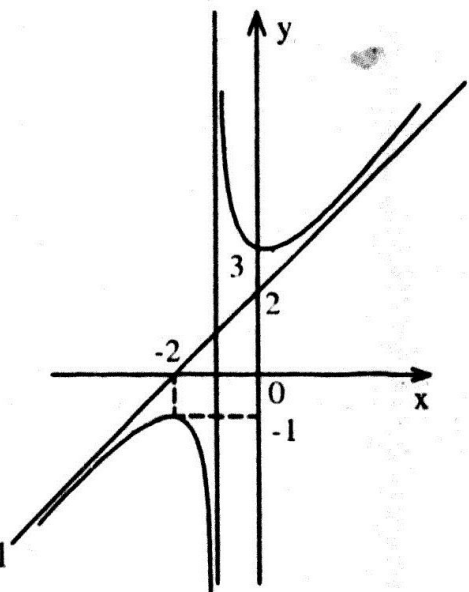
Đặt (C'): $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{|x + 1|}$, ta có:

$$y = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} & \text{nếu } x > -1 \\ -\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1} & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$$

Từ đồ thị (C), ta suy ra đồ thị (C') như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) ứng với $x > -1$ (bên phải tiệm cận đứng), ta được (C₁)
- Đối xứng phần còn lại của đồ thị (C) qua trục Ox, ta được (C₂)
- $(C') = (C_1) \cup (C_2)$

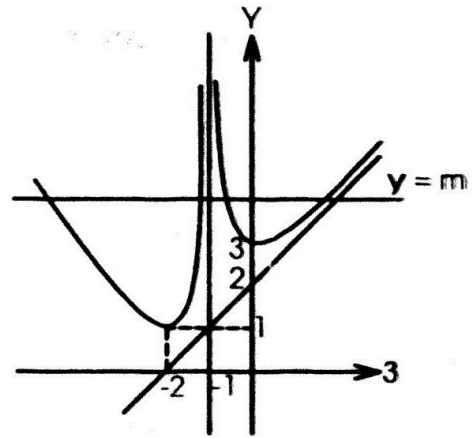
Xét phương trình: $\frac{x^2 + 3x + 3}{|x + 1|} = m \quad (1)$



Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $y = m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow d$ và (C') có bốn giao điểm phân biệt

Dựa vào đồ thị (C'), ta có giá trị cần tìm là : $m > 3$.



Câu II.

1. Giải bất phương trình

$$\text{Ta có : } 9^{x^2-2x} - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \leq 3 \Leftrightarrow 9^{x^2-2x} - 2 \cdot 3^{x^2-2x} \leq 3$$

$$\text{Đặt } t = 3^{x^2-2x} \quad (t > 0), \text{ ta được: } t^2 - 2t - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq t \leq 3 \Rightarrow 0 < t \leq 3 \Leftrightarrow 3^{x^2-2x} \leq 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $1 - \sqrt{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{2}$.

2. Giải phương trình

$$\text{Ta có : } \sin 2x + \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin 2x - \cos x) + (\cos 2x + 3 \sin x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x \cos x - \cos x) - (2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x (2 \sin x - 1) - (\sin x - 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x - \sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x - \sin x + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\bullet \cos x - \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là :

$$x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu III.

1. Viết phương trình đường tròn

Gọi (C) là đường tròn cần tìm và I(a; b) là tâm của (C)

$$\text{Ta có: } IA = IB = R = \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + (5-b)^2 = (2-a)^2 + (3-b)^2 \\ a^2 + (5-b)^2 = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-b+3=0 \\ a^2+b^2-10b+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a+3 \\ a^2-2a-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=6 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10$;

$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 10.$$

2. a) Xác định tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

Tọa độ các đỉnh còn lại của hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là:

$A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 2; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A_1(0; 0; 2)$, $B_1(2; 0; 2)$, $C_1(2; 2; 2)$, $D_1(0; 2; 2)$. M là trung điểm của BC nên $M(2; 1; 0)$.

b) Chứng minh $(AB_1D_1) \perp (AMB_1)$

Mp(AB_1D_1) có cặp vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AB_1} = (2; 0; 2)$, $\overrightarrow{AD_1} = (0; 2; 2)$

$$\Rightarrow \text{Mp}(AB_1D_1) \text{ có vectơ pháp tuyến là } \vec{n}_1 = \frac{1}{4} [\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AD_1}] = (-1; -1; 1)$$

Mp(AMB_1) có cặp vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AM} = (2; 1; 0)$, $\overrightarrow{AB_1} = (2; 0; 2)$

$$\Rightarrow \text{Mp}(AMB_1) \text{ có vectơ pháp tuyến là } \vec{n}_2 = \frac{1}{2} [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB_1}] = (1; -2; -1)$$

$$\text{Ta có: } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

Vậy $(AB_1D_1) \perp (AMB_1)$ (đpcm).

c) Chứng minh

Mp(AB_1D_1) nhận $\vec{n}_1$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$1 \cdot (x-0) + 1 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-0) = 0$$

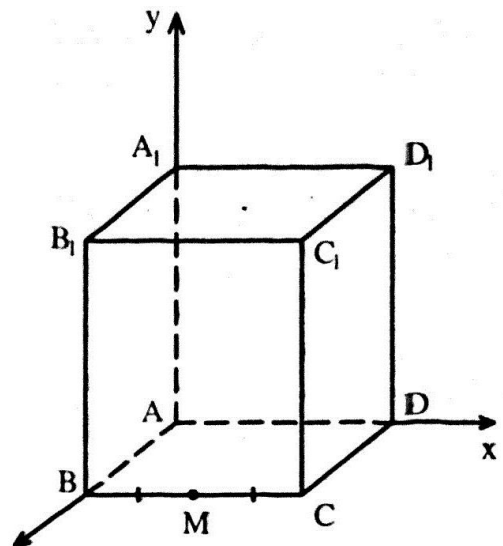
$$\Leftrightarrow x + y - z = 0.$$

Mp(AMB_1) nhận $\vec{n}_2$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình:

$$1 \cdot (x-0) - 2 \cdot (y-0) - 1 \cdot (z-0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y - z = 0.$$

AC_1 nhận $\overrightarrow{AC_1} = 2(1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ



phương có phương trình :
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$N \in AC_1 \Rightarrow N(t; t; t)$, do $N \neq A$ nên $t \neq 0$

Khoảng cách từ N đến (AB_1D_1) và (AMB_1) lần lượt là:

$$d_1 = d(N, (AB_1D_1)) = \frac{|t|}{\sqrt{3}}; d_2 = d(N, (AMB_1)) = \frac{2|t|}{\sqrt{6}}$$

Ta có: $\frac{d_1}{d_2} = \frac{|t|}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2|t|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (đpcm).

Câu IV.

1. Tính tích phân

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)(1+\cos 2x) dx$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos 2x dx = I_1 + I_2$$

- Tính $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) dx$; $I_1 = \frac{1}{2} \left(x^2 - x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}$.

- Tính $I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \cos 2x dx$

Đặt
$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(2x-1) \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$I_2 = \frac{1}{4} (2x-1) \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = 0 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $I = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

2. Tìm $n \in \mathbb{Z}$

Ta có : $2P_n + 6A_n^2 - P_n A_n^2 = 12$ ($n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$)

$$\Leftrightarrow P_n(2 - A_n^2) + 6(A_n^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow (2 - A_n^2)(P_n - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_n^2 = 2 \\ P_n = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n!}{(n-2)!} = 2 \\ n! = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n(n-1) = 2 \\ n = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - n - 2 = 0 \\ n = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 \\ n = 3 \end{cases} \quad (\text{do } n \geq 2).$$

Vậy giá trị cần tìm là : $n = 2 \vee n = 3$.

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Đặt $P = \frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x}$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\bullet \quad \frac{x^2}{1+y} + \frac{1+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{1+y} \cdot \frac{1+y}{4}} = x \quad (1)$$

$$\bullet \quad \frac{y^2}{1+z} + \frac{1+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{1+z} \cdot \frac{1+z}{4}} = y \quad (2)$$

$$\bullet \quad \frac{z^2}{1+x} + \frac{1+x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{1+x} \cdot \frac{1+x}{4}} = z \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế ta có: $P + \frac{1+y}{4} + \frac{1+z}{4} + \frac{1+x}{4} \geq (x+y+z)$

$$\Leftrightarrow P + \frac{3}{4} + \frac{x+y+z}{4} \geq x+y+z \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{4}(x+y+z) - \frac{3}{4}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3 \Rightarrow P \geq \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.$$

Vậy $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$ (đpcm)

ĐỀ SỐ 33

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 3, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ (1) có đồ thị (C).

1. Khảo sát hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C), biết rằng tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 3 = 0$.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình : $2\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 2x = \sin 4x \cos x$.
2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y = y^2 + x \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y \end{cases}$$

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC vuông ở A. Biết $A(-1;4)$, $B(1;-4)$ đường thẳng BC đi qua điểm $M\left(2; \frac{1}{2}\right)$. Tìm tọa độ đỉnh C
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các điểm $A(2;0;0)$, $B(2;2;0)$, $S(0;0;m)$.
 - a) Khi $m = 2$, tìm tọa độ điểm C đối xứng với gốc tọa độ O qua mặt phẳng (SAB).
 - b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SA. Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ diện tích tam giác OBH nhỏ hơn 4.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân : $I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} dx$.
2. Biết rằng trong khai triển nhị thức Niu tơn của $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ tổng các hệ số của hai số hạng đầu tiên bằng 24. Tính tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x và chứng tỏ rằng tổng này là số chính phương.

Câu V. (1 điểm)

Cho phương trình $x^2 + \left(m^2 - \frac{5}{3}\right)\sqrt{x^2 + 4} + 2 - m^3 = 0$.

Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ phương trình luôn luôn có nghiệm.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số (1)

$$y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = x + \frac{4}{x + 1}$$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -5 \\ x = 1 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$

- Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x + \frac{4}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x \text{ là đường tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$				
y'		+	0	-	-	0	+		
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 4$

- Đồ thị:

2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $x - 3y + 3 = 0$

Đặt $d: x - 3y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$.

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm

$\Delta \perp d$ nên phương trình đường thẳng Δ có dạng: $y = -3x + b$

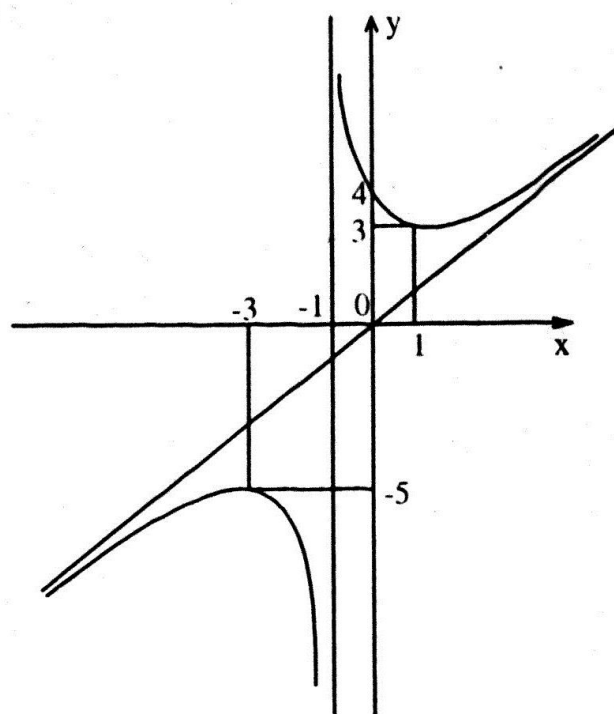
Δ tiếp xúc với (C)

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x + 4}{x + 1} = -3x + b & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} = -3 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \quad (x \neq -1)$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(I)} \\ x = -2 \Rightarrow b = -12 \\ \text{(I)} \\ x = 0 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3x - 12$; $y = -3x + 4$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có : $2\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 2x = \sin 4x \cos x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + \sin 2x) = 2\sin 2x \cos 2x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x(1 + \cos x) = 4\sin x \cos^2 x \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x(2\cos^2 x - \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là :

$$x = k\pi \vee x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \vee x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải hệ phương trình.

$$\text{Xét } \begin{cases} x^2 + y = y^2 + x & (1) \\ 2^{x+y} - 2^{x-1} = x - y & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - y^2 - (x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\bullet \quad x = y: (2) \Leftrightarrow 2^{2x} - 2^{x-1} = 0 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^{x-1} \\ \Leftrightarrow 2x = x - 1 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow x = y = -1$$

$$\bullet \quad y = 1 - x: (2) \Leftrightarrow 2 - 2^{x-1} = 2x - 1 \Leftrightarrow 2^{x-1} = 3 - 2x$$

Nhận xét: $x = 1$ là một nghiệm của phương trình.

Mặt khác: $f(x) = 2^{x-1}$ là hàm đồng biến, và $g(x) = 3 - 2x$ là hàm nghịch biến.

$$\Rightarrow x = 1 \text{ là nghiệm duy nhất của phương trình. } \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: } x = y = -1 \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Câu III.

1. Tìm tọa độ đỉnh C

$$\text{Ta có : } \overrightarrow{AB} = 2(1; -4), \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(2; 9)$$

Đường thẳng AC qua A và nhận $\overrightarrow{AB}$ là vectơ pháp tuyến có phương trình :

$$1.(x+1) - 4.(y-4) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + 17 = 0$$

Đường thẳng BC nhận $\overrightarrow{BM}$ là vectơ chỉ phương có phương trình :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{9} \Leftrightarrow 9x - 2y - 17 = 0$$

$$\text{Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ : } \begin{cases} x - 4y + 17 = 0 \\ 9x - 2y - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là : $C(3; 5)$.

2. a) Tìm tọa độ điểm C đối xứng với gốc tọa độ O qua mặt phẳng (SAB)

Khi $m = 2$, ta có : $\overrightarrow{SA} = (2; 0; -2)$, $\overrightarrow{SB} = (2; 2; -2)$

(SAB) nhận $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ làm cặp vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow (SAB) \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{n} = [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] = 4(1; 0; 1)$$

Phương trình mặt phẳng (SAB) có dạng :

$$1.(x-0) + 0.(y-0) + 1.(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + z - 2 = 0.$$

Gọi Δ là đường thẳng qua O và vuông góc với (SAB) thì Δ nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ có dạng : } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $I = \Delta \cap (SAB)$ là nghiệm của phương trình :

$$2t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(1; 0; 1).$$

C là đối xứng của O qua (SAB) nên I là trung điểm của đoạn OC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_O = 2 \\ y_C = 2y_I - y_O = 0 \\ z_C = 2z_I - z_O = 2 \end{cases} \Rightarrow C(2; 0; 2).$$

b) Chứng minh rằng với mọi $m > 0$ diện tích tam giác OBH nhỏ hơn 4

Đường thẳng SA nhận $\vec{SA} = (2; 0; -m)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình

$$\text{tham số : } \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 0 \\ z = -mt \end{cases}$$

$$H \in SA \Rightarrow H(2 + 2t; 0; -mt) ; OH \perp SA \Leftrightarrow \vec{OH} \cdot \vec{SA} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(2 + 2t) + m^2 t = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{m^2 + 4} \Rightarrow H\left(\frac{2m^2}{m^2 + 4}; 0; \frac{4m}{m^2 + 4}\right).$$

$$\text{Ta có : } \vec{OH} = \frac{4m}{m^2 + 4}(m; 0; 2), \vec{OB} = 2(1; 1; 0) \Rightarrow [\vec{OH}, \vec{OB}] = \frac{4m}{m^2 + 4}(-2; 2; m)$$

$$\text{Diện tích } \triangle OBH \text{ là : } S = \frac{1}{2} \|\vec{OH}, \vec{OB}\| = \frac{2m \cdot \sqrt{m^2 + 8}}{m^2 + 4}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có : } m^2 + m^2 + 8 \geq 2 \cdot m \cdot \sqrt{m^2 + 8}$$

$$\text{Do đó : } S = \frac{2 \cdot m \cdot \sqrt{m^2 + 8}}{m^2 + 4} \leq \frac{m^2 + m^2 + 8}{m^2 + 4} = 2 < 4 \text{ (đpcm).}$$

Cách khác

$$\text{Ta có : } \begin{cases} OH \perp SA \\ OH \perp AB \text{ (do } AB \perp (OSA)) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (SAB) \Rightarrow OH \perp HB$$

$$\Rightarrow \triangle OBH \text{ vuông tại H}$$

$$\text{Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có : } 8 = OB^2 = OH^2 + HB^2 \geq 2 \cdot OH \cdot HB$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} OH \cdot HB \leq 2 \Leftrightarrow S_{\triangle OBH} \leq 2 < 4 \text{ (đpcm).}$$

Câu IV.

$$1. \text{ Tính tích phân. } I = \int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \cdot \sin \sqrt{x} \cdot dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} \Rightarrow x = t^2 \Rightarrow dx = 2t dt ; \text{ Đổi cận: } \begin{array}{c|cc} x & 0 & \pi^2 \\ \hline t & 0 & \pi \end{array}$$

$$I = \int_0^{\pi} 2t^2 \sin t dt.$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2t^2 \Rightarrow du = 4t dt \\ dv = \sin t dt \Rightarrow v = -\cos t \end{cases}$$

$$I = -2t^2 \cos t \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 4t \cos t dt ; I = 2\pi^2 + I_1$$

Tính $I_1 = \int_0^{\pi} 4t \cos t dt$.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u_1 = 4t \Rightarrow du_1 = 4dt \\ dv_1 = \cos t dt \Rightarrow v_1 = \sin t \end{cases}$$

$$I_1 = 4t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 4 \sin t dt = 0 + 4 \cos t \Big|_0^{\pi} = -8$$

$$\text{Vậy } I = 2\pi^2 - 8.$$

2. Tính tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của x và chứng tỏ rằng tổng này là số chính phương

$$\text{Xét } \left(x + \frac{1}{x}\right)^n$$

$$\text{Số hạng tổng quát: } T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_n^k x^{n-2k} \quad (k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n)$$

Tổng của các hệ số của hai số hạng đầu tiên bằng 4

$$\Leftrightarrow C_n^0 + C_n^1 = 24 \Leftrightarrow 1 + n = 24 \Leftrightarrow n = 23$$

Số hạng chứa x mũ nguyên dương thỏa : $n - 2k > 0 \Leftrightarrow 23 - 2k > 0$

$$\Leftrightarrow k < \frac{23}{2} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, \dots, 11\} \Rightarrow \text{Có 12 số hạng chứa } x \text{ mũ nguyên dương}$$

$$\text{Tổng 12 hệ số đó là: } S = C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + \dots + C_{23}^9 + C_{23}^{10} + C_{23}^{11}$$

$$\text{Ta có : } (1+x)^{23} = C_{23}^0 + C_{23}^1 x + C_{23}^2 x^2 + \dots + C_{23}^{22} x^{22} + C_{23}^{23} x^{23}$$

$$\text{Cho } x=1, \text{ ta được : } 2^{23} = C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + \dots + C_{23}^{22} + C_{23}^{23}$$

$$\text{Mặt khác: } C_{23}^0 = C_{23}^{23}, C_{23}^1 = C_{23}^{22}, C_{23}^2 = C_{23}^{21}, \dots$$

$$\text{Do đó: } 2^{23} = 2(C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + \dots + C_{23}^{11}) = 2S$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{2^{23}}{2} = 2^{22} \Rightarrow \sqrt{S} = 2^{11}.$$

Vậy S là số chính phương.

Câu V. Chứng minh rằng với mọi $m \geq 0$ phương trình luôn luôn có nghiệm

$$\text{Xét phương trình : } x^2 + \left(m^2 - \frac{5}{3}\right)\sqrt{x^2 + 4} + 2 - m^3 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 4} \quad (t \geq 2) \Rightarrow x^2 = t^2 - 4, \text{ ta được: } f(t) = t^2 + \left(m^2 - \frac{5}{3}\right)t - m^3 - 2 = 0 \quad (2)$$

Ta sẽ chứng minh phương trình (2) luôn luôn có nghiệm $t \geq 2$

$$\text{Ta có : } 1. f(2) = -m^3 + 2m^2 - \frac{4}{3}$$

Xét hàm số : $g(m) = -m^3 + 2m^2 - \frac{4}{3}$, với $m \geq 0$

$$g'(m) = -3m^2 + 4m ;$$

$$g'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

m	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$g'(m)$	0	0	-
$g(m)$	0	$-\frac{4}{27}$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $f(2) = g(m) \leq -\frac{4}{27} < 0, \forall m \geq 0$.

$\Rightarrow$ Phương trình (2) luôn luôn có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa : $t_1 < 2 < t_2$.

$\Rightarrow$ Phương trình (1) luôn luôn có nghiệm với mọi $m \geq 0$ (đpcm).

ĐỀ SỐ 34

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 4, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$ (*).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (*).
2. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của (C). Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua điểm I.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải bất phương trình : $\sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \leq 0$.
2. Giải phương trình : $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x}$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường tròn :
 $(C_1): x^2 + y^2 = 9$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$.
Viết phương trình trục đẳng phương d của hai đường tròn $(C_1), (C_2)$. Chứng minh rằng nếu điểm K thuộc d thì khoảng cách từ K đến tâm của (C_1) nhỏ hơn khoảng cách từ K đến tâm của (C_2) .
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $M(5; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$.
 - a) Gọi M_1 là hình chiếu vuông góc của M trên mặt phẳng (P). Xác định tọa độ điểm M_1 và tính độ dài đoạn M_1M .
 - b) Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và chứa đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-6}$.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x + e^{\sin x} \cos x) dx$.
2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 5 chữ số khác nhau và nhất thiết phải có hai chữ số 1, 5?

Câu V. (1 điểm)

Chứng minh rằng nếu $0 \leq y \leq x \leq 1$ thì $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}$. Khi nào đẳng thức xảy ra?

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = x + 1 + \frac{1}{x + 1}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$

- Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x + 1 + \frac{1}{x + 1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x + 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x + 1 \text{ là đường tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$	

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 2$

- Đồ thị:

2. **Chứng minh rằng không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua điểm I.**

Ta có: $I(-1; 0)$

Phương trình đường thẳng Δ qua I với hệ số góc k có dạng: $y = k(x + 1)$

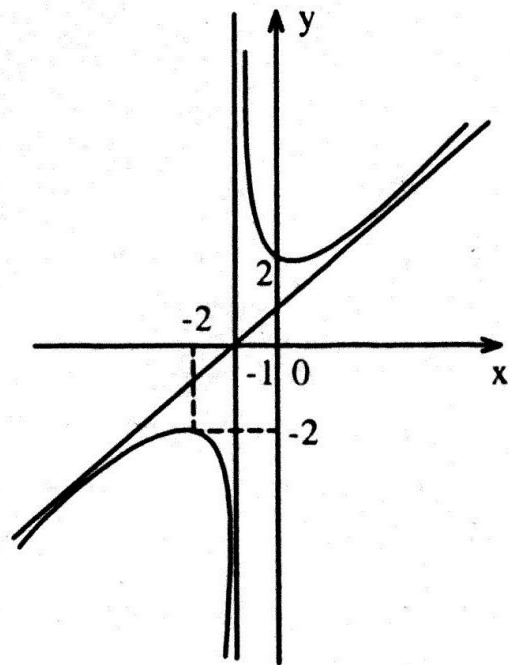
Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = k(x + 1) & (1) \\ \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được: $\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} (x + 1) \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow 2 = 0: \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua I (đpcm).



Câu II.

1. Giải bất phương trình

$$\text{Ta có : } \sqrt{8x^2 - 6x + 1} - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{8x^2 - 6x + 1} \leq 4x - 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 6x + 1 \geq 0 \\ 4x - 1 \geq 0 \\ 8x^2 - 6x + 1 \leq (4x - 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \geq \frac{1}{4} \\ 4x^2 - x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 0 \vee x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $x = \frac{1}{4} \vee x \geq \frac{1}{2}$.

2. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có : } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3\operatorname{tg}^2 x = \frac{\cos 2x - 1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow -\cot x - 3\operatorname{tg}^2 x = \frac{-2\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 3\operatorname{tg}^2 x = 2\operatorname{tg}^2 x \Leftrightarrow \operatorname{tg}^3 x = -1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình : $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Câu III.

1. • Viết phương trình trục đẳng phương (d) của hai đường tròn $(C_1), (C_2)$.

Đường tròn (C_1) có tâm $O(0; 0)$, bán kính $R_1 = 3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I(1; 1)$, bán kính $R_2 = 5$

Phương trình trục đẳng phương (d) của hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ là :

$$x^2 + y^2 - 9 = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 \Leftrightarrow x + y + 7 = 0$$

- Chứng minh khoảng cách từ K đến tâm của (C_1) nhỏ hơn khoảng cách từ K đến tâm của (C_2)

Đặt $K(t, -t-7) \in (d)$, ta có: $OK^2 = t^2 + (t+7)^2 = 2t^2 + 14t + 49$

$$IK^2 = (t-1)^2 + (t+8)^2 = 2t^2 + 14t + 65$$

Mặt khác: $IK^2 - OK^2 = 16 > 0 \Rightarrow IK^2 > OK^2 \Leftrightarrow IK > OK \text{ (đpcm)}.$

2.

a) **Xác định tọa độ điểm M_1 và tính độ dài đoạn MM_1 .**

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; 2; -1)$

Phương trình tham số MM_1 qua M và vuông góc với (P) là:
$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 - t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $M_1 = MM_1 \cap (P)$ là nghiệm của phương trình

$$2(5 + 2t) + 2(2 + 2t) - (-3 - t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -2 \Rightarrow M_1(1; -2; -1).$$

Độ dài đoạn MM_1 là: $MM_1 = \sqrt{(5-1)^2 + (2+2)^2 + (-3+1)^2} = 6.$

b) **Viết phương trình mặt phẳng (Q) đi qua điểm M và chứa đường thẳng**

Δ đi qua A(1; 1; 5) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 1; -6)$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = (4; 1; -8)$

(Q) đi qua M và chứa Δ nên (Q) nhận $\overrightarrow{AM}, \vec{a}$ làm cặp vectơ chỉ phương

$\Rightarrow (Q)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \vec{a}] = 2(1; 4; 1).$

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng:

$$1.(x-5) + 4.(y-2) + 1.(z+3) = 0 \Leftrightarrow x + 4y + z - 10 = 0.$$

Cách khác

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ :
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 6y + z - 11 = 0 \end{cases}$$

(Q) chứa Δ nên phương trình mp(Q) có dạng:

$$m(x - 2y + 1) + n(6y + z - 11) = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow mx + 2(3n - m)y + nz + m - 11n = 0$$

$$M \in (Q) \Rightarrow m - n = 0 : \text{chọn } m = n = 1 \Rightarrow (Q): x + 4y + z - 10 = 0.$$

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx + e^{\sin x} \cos x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} \cos x dx$$

$$= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin x} d(\sin x) = - \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + e^{\sin x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{1}{2} \ln 2 + e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1.$$

2. Tìm số

Đặt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Số cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ ($a_1 \neq 0$)

- Chọn 2 trong 5 vị trí xếp hai chữ số 1 và 5: Có $A_5^2 = 20$ cách.
- Chọn 3 chữ số thuộc $A \setminus \{1, 5\}$ xếp vào 3 vị trí còn lại: Có $A_3^3 = 60$ cách.

Vậy có tất cả: $20 \cdot 60 = 1200$ (số).

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh rằng nếu $0 \leq y \leq x \leq 1$ thì $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}$. Khi nào đẳng thức xảy

ra ?. Ta có: $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow x\sqrt{y} - y\sqrt{x} - \frac{1}{4} \leq 0$

Đặt $t = \sqrt{y}$, $0 \leq t \leq 1$, ta được: $f(t) = -\sqrt{x}t^2 + xt - \frac{1}{4} \leq 0$

- Xét $x = 0$: $f(t) = -\frac{1}{4} \leq 0$: Bất đẳng thức luôn luôn đúng.

- Xét $0 < x \leq 1$: Ta có: $x^2 \leq \sqrt{x}$

Do đó: $\Delta_f = x^2 - \sqrt{x} \leq 0, \forall x \in (0; 1] \Rightarrow f(t) \leq 0, \forall t \in [0; 1]$

$$\Delta_f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x} = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Khi đó: $f(t) = -t^2 + t - \frac{1}{4} = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0 \Rightarrow f(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$

Từ hai trường hợp trên, suy ra bất đẳng thức đã cho được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}$.

Cách khác

Do $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq x^2$. Ta có: $x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} + y\sqrt{x} \geq x\sqrt{y}$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$y\sqrt{x} + \frac{1}{4} \geq yx^2 + \frac{1}{4} \geq 2\sqrt{yx^2 \cdot \frac{1}{4}} = x\sqrt{y} \Rightarrow x\sqrt{y} - y\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ \sqrt{x} = x^2 \\ yx^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{1}{4} \end{cases}.$$

ĐỀ SỐ 35

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 5, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
2. Viết phương trình đi qua điểm $M(-1; 0)$ và tiếp xúc với đồ thị (C).

Câu II. (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt{2x + y + 1} - \sqrt{x + y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$$
2. Giải phương trình : $2\sqrt{2} \cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3\cos x - \sin x = 0$.

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn :

$$(C): x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0.$$

Viết phương trình đường tròn (C_1) tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với đường tròn (C).

2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(2; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $S(0; 0; 4)$.

a) Tìm tọa độ điểm B thuộc mặt phẳng Oxy sao cho tứ giác OABC là hình chữ nhật. Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, B, C, S.

b) Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua đường thẳng SC.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}} dx$.
2. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển thành đa thức của $(2-3x)^{2n}$, trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024$.
(C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

Câu V. (1 điểm)

Chứng minh rằng với mọi $x, y > 0$ ta có $(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -3 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$
- Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x + \frac{1}{x+1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x \text{ là đường tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow -3$	$\searrow -\infty$	$+\infty$	$\searrow 1$	$\nearrow +\infty$

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 1$
- Đồ thị:

2. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;0)$

Phương trình đường thẳng Δ qua điểm M với hệ số góc k có dạng: $y = k(x+1)$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x+1} = k(x+1) & (1) \end{cases}$$

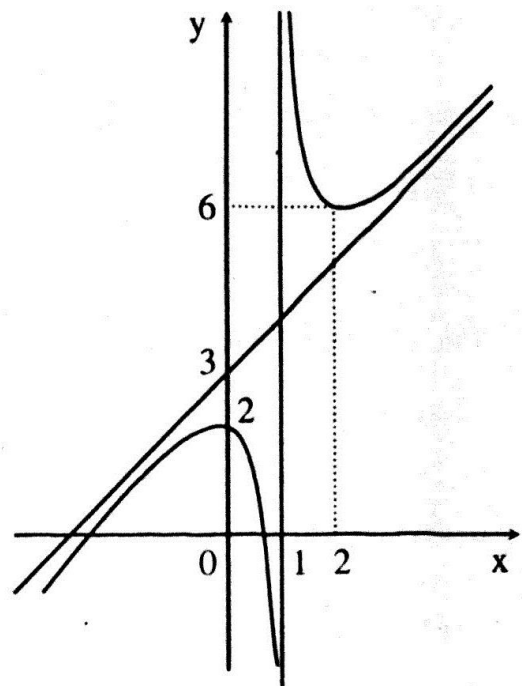
$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta có:

$$\frac{x^2 + x + 1}{x+1} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} (x+1) \quad (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}$



Câu II.

1. Giải hệ phương trình

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ (2x+y+1) + (x+y) = 5 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \sqrt{2x+y+1} \\ v = \sqrt{x+y} \end{cases} \quad (u \geq 0, v \geq 0), \text{ ta được: } \begin{cases} u - v = 1 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ v^2 + v - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v + 1 \\ v = 1 \\ v = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} = 2 \\ \sqrt{x+y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=4 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}. \text{ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}.$$

Cách khác

$$\text{Xét: } \begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \quad (1) \\ 3x+2y=4 \quad (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y = 2 - \frac{3x}{2} \quad (3)$$

$$\text{Thế (3) vào (1), ta có: } \sqrt{x+6} - \sqrt{4-x} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{2} + \sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 4 \\ x+6 = 6 - x + 2\sqrt{8-2x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{8-2x} = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 8-2x = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ x = -4 \vee x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1.$$

$$\text{Vậy nghiệm của hệ phương trình là: } \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

2. Giải phương trình

$$\text{Đặt } t = x - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = t + \frac{\pi}{4}$$

Ta

$$\text{có: } 2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 3 \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos^3 t - 3 \cos \left(t + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \left(t + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos^3 t - \frac{3\sqrt{2}}{2} (\cos t - \sin t) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin t + \cos t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^3 t + \sin t - 2 \cos t = 0 \Leftrightarrow 2 \cos t (\cos^2 t - 1) + \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \cos t \sin^2 t + \sin t = 0 \Leftrightarrow (1 - \sin 2t) \sin t = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ \sin 2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = k\pi \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Cách khác

Ta có: $2\sqrt{2} \cos^3 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 3 \cos x - \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x + \sin x) \right]^3 - 3 \cos x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)^3 - 3 \cos x - \sin x = 0 \quad (*)$$

- Xét $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$:

$$(*) \Leftrightarrow \sin^3 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x (1 - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos^2 x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \text{ là nghiệm của phương trình}$$

- Xét $\cos x \neq 0$: chia hai vế của phương trình cho $\cos^3 x$, ta được:

$$(1 + \tan x)^3 - 3(1 + \tan^2 x) - \tan x(1 + \tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu III.

1. Viết phương trình đường tròn (C_1)

(C) có tâm I(6; 2) và bán kính R = 2.

Gọi $I_1(a; b)$, R_1 lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn (C_1)

- (C_1) tiếp xúc với hai trục Ox, Oy $\Leftrightarrow |a| = |b| = R_1$
- (C_1) tiếp xúc ngoài với (C) $\Leftrightarrow R_1 + R = I_1 I$

$$\Leftrightarrow (R_1 + R)^2 = I_1 I^2 \Leftrightarrow (R_1 + 2)^2 = (6 - a)^2 + (2 - b)^2 \quad (*)$$

Ta có: $|a| = |b| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$

Trường hợp 1: $a = b, R_1 = |a|$

$$(*) \Leftrightarrow (|a| + 2)^2 = (6 - a)^2 + (2 - a)^2 \Leftrightarrow a^2 - 4|a| - 16a + 36 = 0 \quad (1)$$

Xét $a \geq 0$: $(1) \Leftrightarrow a^2 - 20a + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \Rightarrow I_1(18; 18), R_1 = 18 \\ a = 2 \Rightarrow I_1(2; 2), R_1 = 2 \end{cases}$

Xét $a < 0$: $(1) \Leftrightarrow a^2 - 12a + 36 = 0 \Leftrightarrow a = 6$ (loại).

Trường hợp 2: $a = -b, R_1 = |a|$

$$(*) \Leftrightarrow (|a| + 2)^2 = (6 - a)^2 + (2 + a)^2 \Leftrightarrow a^2 - 4|a| - 8a + 36 = 0 \quad (2)$$

Xét $a \geq 0$: $(2) \Leftrightarrow a^2 - 12a + 36 = 0 \Leftrightarrow a = 6 \Rightarrow I_1(6; -6), R_1 = 6$

Xét $a < 0$: $(2) \Leftrightarrow a^2 - 4a + 36 = 0$: vô nghiệm

Vậy có ba đường tròn cần tìm là: $(x - 18)^2 + (y - 18)^2 = 324$;

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4; (x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 36.$$

b. a)

- **Tìm tọa độ điểm $B \in (Oxy)$ để tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật**

Đặt $B(x; y; 0) \in (Oxy)$, ta có: $\overrightarrow{AB} = (x - 2; y; 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0; 4; 0)$

Tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow B(2; 4; 0).$$

- **Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm O, B, C, S**

Gọi (S) là mặt cầu cần tìm và I, R lần lượt là tâm và bán kính của (S)

Ta có: $\widehat{SOB} = \widehat{SCB} = 90^\circ$ nên I là trung điểm của $SB \Rightarrow I(1; 2; 2)$ và

$$R = \frac{1}{2}SB = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 16 + 16} = 3.$$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$.

- b) **Tìm tọa độ điểm A_1 đối xứng với điểm A qua đường thẳng SC**

Ta có: $\overrightarrow{SC} = 4(0; 1; -1)$

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC thì (α) nhận $\overrightarrow{SC}$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $0 \cdot (x - 2) + y - z = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$.

Phương trình tham số của đường thẳng SC :
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 4 - t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $I = SC \cap (\alpha)$ là nghiệm của phương trình:

$$t - (4 - t) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow I(0; 2; 2).$$

A_1 là điểm đối xứng với A qua SC nên I là trung điểm của AA_1

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A_1} = 2x_I - x_A = -2 \\ y_{A_1} = 2y_I - y_A = 4 \\ z_{A_1} = 2z_I - z_A = 4 \end{cases} \Rightarrow A_1(-2; 4; 4).$$

Câu IV.

1. **Tính tích phân:** $I = \int_0^7 \frac{x+2}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$

Đặt $t = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow t^3 = x+1 \Rightarrow \begin{cases} x = t^3 - 1 \\ dx = 3t^2 dt \end{cases}$

Đổi cận: $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 7 \\ \hline t & 1 & 2 \end{array}$.

$$I = \int_1^2 \left(\frac{t^3 + 1}{t} \right) \cdot 3t^2 dt = 3 \int_1^2 (t^4 + t) dt = 3 \left(\frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{2} t^2 \right) \Big|_1^2 = \frac{231}{10}$$

2. **Tìm các hệ số x^7**

Xét nhị thức :

$$(1+x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + C_{2n+1}^3 x^3 + C_{2n+1}^4 x^4 + C_{2n+1}^5 x^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n} x^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

Cho $x = -1$, ta có :

$$\begin{aligned} 0 &= C_{2n+1}^0 - C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 - C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^4 - C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n} - C_{2n+1}^{2n+1} \\ \Leftrightarrow C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^4 + \dots + C_{2n+1}^{2n} &= C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \quad (1) \end{aligned}$$

Cho $x = 1$, ta có :

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^4 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1} \\ \Leftrightarrow 2^{2n+1} &= 2 \left(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} \right) \quad (\text{do (1)}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^3 + C_{2n+1}^5 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 2^{2n}$$

Theo giả thiết, ta có: $2^{2n} = 1024 = 2^{10} \Leftrightarrow n = 5.$

Với $n = 5$, ta có : $(2 - 3x)^{10}$

Số hạng tổng quát : $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{10}^k \cdot 2^{10-k} (-3x)^k = C_{10}^k (-1)^k 2^{10-k} \cdot 3^k x^k$

Số hạng chứa x^7 ứng với $k = 7$

Vậy hệ số của x^7 là : $-C_{10}^7 2^3 \cdot 3^7 = -2099520.$

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\bullet \quad 1+x = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x^3}{3^3}} \quad (1)$$

$$\bullet \quad 1+\frac{y}{x} = 1 + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} + \frac{y}{3x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{y^3}{3^3 \cdot x^3}} \quad (2)$$

$$\bullet \quad 1+\frac{9}{\sqrt{y}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}} + \frac{3}{\sqrt{y}} \geq 4\sqrt[4]{\frac{3^3}{(\sqrt{y})^3}} \Rightarrow \left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 16\sqrt[4]{\frac{3^6}{y^3}} \quad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được:

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 256 \cdot \sqrt[4]{\frac{x^3}{3^3} \cdot \frac{y^3}{3^3 \cdot x^3} \cdot \frac{3^6}{y^3}} = 256 \quad (\text{đpcm}).$$

Cách khác:

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$(1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right) \geq \left(1 \cdot 1 + \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)^2 = (1+\sqrt{y})^2$$

$$\text{Do đó: } (1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq (1+\sqrt{y})^2 \left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 = \left[(1+\sqrt{y})\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)\right]^2$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$(1+\sqrt{y})\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right) \geq \left(1 \cdot 1 + \sqrt[4]{y} \cdot \frac{3}{\sqrt[4]{y}}\right)^2 = 16$$

$$\text{Suy ra: } (1+x)\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{9}{\sqrt{y}}\right)^2 \geq 16^2 = 256 \quad (\text{đpcm}).$$

ĐỀ SỐ 36

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 6, NĂM 2005

Câu I. (2 điểm)

Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2mx + 1 - 3m^2}{x - m}$ (*) (m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (*) khi $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục tung.

Câu II. (2 điểm)

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$$
2. Tìm nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$ của phương trình :

$$4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4} \right).$$

Câu III. (3 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác cân ABC đỉnh A, có trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$, phương trình đường thẳng BC là $x - 2y - 4 = 0$ và phương trình đường thẳng BG là $7x - 4y - 8 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
2. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1; 1; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$.
 - a) Viết phương trình mặt phẳng (P) qua gốc tọa độ O và vuông góc với BC. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AC với mặt phẳng (P).
 - b) Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông. Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \lg x dx$.
2. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng của các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8?

Câu V. (1 điểm)

Cho x, y, z là ba số thỏa mãn $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 6.$$

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số

Chỉ $m = 1$, ta có : $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 6 \end{cases}$

- Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1 \sqrt{b^2 - 4ac}$ là đường tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x + 3 + \frac{1}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x + 3 \text{ là đường tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$				
y'	+	0	-	-	0	+			
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

- Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{3}$$

- Đồ thị:

2. Tìm m

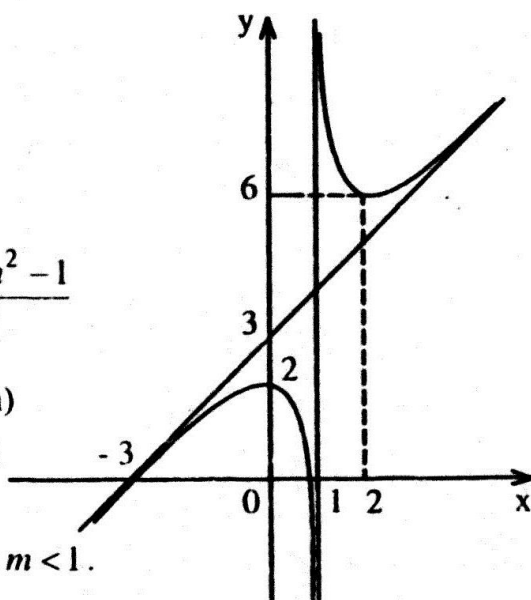
$$y = \frac{x^2 - 2mx + 1 - 3m^2}{x - m}; y' = \frac{x^2 - 2mx + m^2 - 1}{(x - m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 (*) \quad (x \neq m)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác m và thỏa :

$$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P = x_1 \cdot x_2 = m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1.$$

Vậy giá trị cần tìm là : $-1 < m < 1$.



Câu II.

1. Giải hệ phương trình

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + x + y - 2xy = 4 \\ xy = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 + x + y = 0 \\ xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$$

- Với $\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases}$: $\Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình :

$$X^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = \sqrt{2} \\ X = -\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$$

- Với $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$: $\Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình :

$$X^2 + X - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1 \\ X = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

2. Tìm nghiệm của phương trình thuộc khoảng $(0; \pi)$

Ta có : $4\sin^2 \frac{x}{2} - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 2\cos^2 \left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3} \cos 2x = 1 + 1 + \cos \left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - \cos x) - \sqrt{3} \cos 2x = 2 - \sin 2x \Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = -2 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x = -\cos x \Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \pi - x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = x - \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Do $x \in (0; \pi) \Rightarrow x = \frac{5\pi}{18}; x = \frac{17\pi}{18}; x = \frac{5\pi}{6}.$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \frac{5\pi}{18} \vee x = \frac{17\pi}{18} \vee x = \frac{5\pi}{6}.$

Câu III.

1. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 7x - 4y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; -2)$

Gọi $M = AG \cap BC$ thì M là trung điểm của BC

ΔABC cân tại A nên AM cũng là đường cao

$AM \perp BC$ nên phương trình của AM có dạng: $2x + y + C = 0$

$G \in AM \Rightarrow C = -3 \Rightarrow AM: 2x + y - 3 = 0$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(2; -1)$$

M là trung điểm của BC nên ta có:
$$\begin{cases} x_C = 2x_M - x_B = 4 \\ y_C = 2y_M - y_B = 0 \end{cases} \Rightarrow C(4; 0)$$

G là trọng tâm ΔABC nên:

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3x_G - (x_B + x_C) = 0 \\ y_A = 3y_G - (y_B + y_C) = 3 \end{cases} \Rightarrow A(0; 3).$$

Vậy tọa độ các đỉnh của ΔABC là: A(0; 3), C(4; 0), B(0; -2).

2. a) **Viết phương trình mặt phẳng (P)**

Ta có: $\overrightarrow{BC} = -2(0; 1; -1)$. (P) qua O và vuông góc với BC nên nhận $\overrightarrow{BC}$ làm vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $y - z = 0$.

Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AC với mặt phẳng (P)

Đường thẳng AC nhận $\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương

trình:
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$
 Tham số t ứng với giao điểm $M = AC \cap (P)$ là nghiệm của

phương trình: $1 - t - 2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

b) **Chứng minh tam giác ABC là tam giác vuông**

Với A(1; 1; 0), B(0; 2; 0), C(0; 0; 2)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0) \Rightarrow AB = \sqrt{2}$

$\overrightarrow{AC} = (-1; -1; 2) \Rightarrow AC = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{BC} = (0; -2; 2) \Rightarrow BC = 2\sqrt{2}$

Mặt khác: $AB^2 + AC^2 = 2 + 6 = 8 = BC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A (đpcm).

Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC

ΔBOC vuông tại O nên A, O cùng nhìn đoạn BC dưới một góc vuông. Do đó, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện OABC có tâm là trung điểm của BC và bán kính

$R = \frac{1}{2}BC$. Gọi (S) là mặt cầu cần tìm và I, R lần lượt là tâm và bán kính của (S),

ta có: + I là trung điểm của đoạn BC $\Rightarrow I(0; 1; 1)$

$$+ R = \frac{1}{2}BC = \sqrt{2}$$

Phương trình mặt cầu (S) có dạng : $x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2$.

Câu IV

1. Tính tích phân

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x \right) d(\cos x) = -\left(\ln|\cos x| - \frac{1}{2} \cos^2 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \ln 2 - \frac{3}{8}$$

2. Tìm số: Đặt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Gọi số cần tìm là : $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6$ ($a \neq 0$). Theo giả thiết, ta có: $a_3 + a_4 + a_5 = 8$

Trường hợp 1. $a_3, a_4, a_5 \in \{1, 2, 5\}$

- Hoán vị 3 chữ số a_3, a_4, a_5 : có $3!$ cách.
- Chọn 3 chữ số thuộc $A \setminus \{1, 2, 5\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_6^3 cách.

Trường hợp này có: $3! A_6^3 = 720$ (số).

Trường hợp 2: $a_3, a_4, a_5 \in \{1, 3, 4\}$

- Hoán vị 3 chữ số a_3, a_4, a_5 : có $3!$ cách.
- Chọn 3 chữ số thuộc $A \setminus \{1, 3, 4\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_6^3 cách.

Trường hợp này có: $3! A_6^3 = 720$ (số). Vậy có tất cả: $720 + 720 = 1440$ (số).

Câu V. Chứng minh bất đẳng thức

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\bullet \quad 3 + 4^x = 1 + 1 + 1 + 4^x \geq 4\sqrt[4]{4^x} \Rightarrow \sqrt{3 + 4^x} \geq 2\sqrt[4]{4^x} = 2\sqrt[8]{4^x} \quad (1)$$

Tương tự :

$$\bullet \quad \sqrt{3 + 4^y} \geq 2\sqrt[8]{4^y} \quad (2)$$

$$\bullet \quad \sqrt{3 + 4^z} \geq 2\sqrt[8]{4^z} \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được:

$$\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 2\left(\sqrt[8]{4^x} + \sqrt[8]{4^y} + \sqrt[8]{4^z}\right)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt[8]{4^x} + \sqrt[8]{4^y} + \sqrt[8]{4^z} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt[8]{4^x} \cdot \sqrt[8]{4^y} \cdot \sqrt[8]{4^z}} = 3\sqrt[24]{4^{x+y+z}} = 3 \quad (\text{do } x + y + z = 0)$$

Vậy $\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 6$ (đpcm).

ĐỀ SỐ 37

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2006, KHỐI A

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$.
2. Tìm m để phương trình sau có 6 nghiệm phân biệt: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình:
$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x} = 0.$$
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0), A'(0;0;1)$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.
2. Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng Oxy một góc α biết $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân:
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}} dx.$$
2. Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện:
$$(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường thẳng:

$$d_1: x + y + 3 = 0, \quad d_2: x - y - 4 = 0, \quad d_3: x - 2y = 0.$$

Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d_3 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng d_1 bằng hai lần khoảng cách từ M đến đường thẳng d_2 .

2. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức Niuton của

$$\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n, \text{ biết rằng } C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1.$$

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$

2. Cho hình trụ có các đáy là hai hình tròn tâm O và O', bán kính đáy bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn đáy tâm O lấy điểm A, trên đường đáy tâm O' lấy điểm B sao cho $AB = 2a$. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$$

• Miền xác định: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

• Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	0	$+\infty$	

• Tính lồi, lõm và điểm uốn:

$$y'' = 12x - 18$$

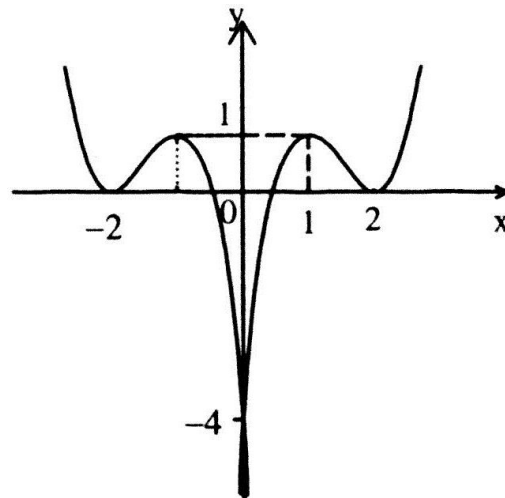
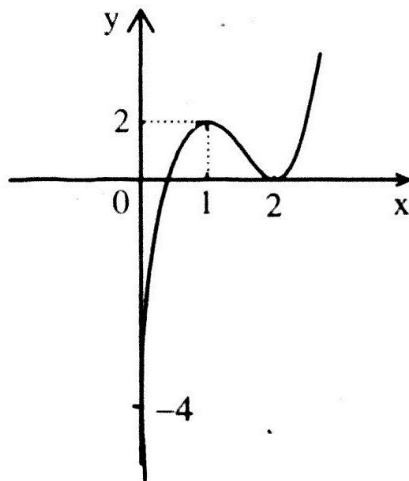
$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y''	-	0	+
Đồ thị	lồi	$I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$	lõm

• Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = -4$

$$y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2$$

- Đồ thị:



2. Tìm m

Ta có: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4$

Đặt $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ và $(C'): y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$

Hàm số của đồ thị (C') là hàm số chẵn nên (C') nhận Oy là trục đối xứng. Từ đồ thị (C) ta suy ra đồ thị (C') như sau:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) bên phải trục Oy, ta được (C'_1)
- Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị (C) vừa giữ lại, ta được (C'_2)
- $(C') = (C'_1) \cup (C'_2)$.

Số nghiệm của phương trình: $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng $d: y = m - 4$.

Từ đồ thị (C') , ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta có: $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$

$$\Leftrightarrow 2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) - \sin x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{4}{3} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \frac{5\pi}{4} + l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z})$.

2. Giải hệ phương trình

Cách 1

$$\text{Xét: } \begin{cases} x+y-\sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} xy \geq 0 \\ x \geq -1 \\ y \geq -1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4$$

$$\Leftrightarrow x+1+y+1+2\sqrt{(x+1)(y+1)}=16 \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{x+y+xy+1}=14$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases} \quad (P \geq 0, S^2-4P \geq 0)$$

$$\text{Hệ phương trình đã cho tương đương với: } \begin{cases} S-\sqrt{P}=3 & (1) \\ S+2\sqrt{S+P+1}=14 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{P}=S-3 \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 3 \\ P=S^2-6S+9 \end{cases}$$

$$\text{Thế vào (2), ta được: } S+2\sqrt{S^2-5S+10}=14 \Leftrightarrow 2\sqrt{S^2-5S+10}=14-S$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14 \\ 4(S^2-5S+10)=(14-S)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14 \\ 3S^2+8S-156=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq S \leq 14 \\ S=6 \vee S=-\frac{26}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S=6 \Rightarrow P=9 \Rightarrow x, y \text{ là nghiệm của phương trình:}$$

$$X^2-6X+9=0 \Leftrightarrow X=3 \Leftrightarrow x=y=3.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình: $x=y=3$.

Cách 2

$$\text{Xét: } \begin{cases} x+y-\sqrt{xy} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$(1) \Leftrightarrow x+y=3+\sqrt{xy} \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 3 \\ xy \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0, y \geq 0$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$x+y=3+\sqrt{xy} \leq 3+\frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y \leq 6 \quad (*)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$1.\sqrt{x+1}+1.\sqrt{y+1} \leq \sqrt{2(x+y+2)} \leq \sqrt{2(6+2)}=4 \quad (\text{do}(*))$$

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+1}=\sqrt{y+1} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3.$

So với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình: $x=y=3.$

Cách 3

Đặt $t = \sqrt{xy}, t \geq 0$

$$(1) \Rightarrow x+y = \sqrt{xy} + 3 = t+3$$

$$(2) \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{x+y+xy+1} = 14$$

$$\Leftrightarrow t+3+2\sqrt{t^2+t+4} = 14 \Leftrightarrow 2\sqrt{t^2+t+4} = 11-t$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11-t \geq 0 \\ 4(t^2+t+4) = (11-t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 3t^2+26t-105=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ t=3 \vee t=-\frac{35}{3} \end{cases} \Leftrightarrow t=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3.$$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình: $x=y=3.$

Câu III.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN

Ta có : $C(1;1;0)$

M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD nên ta có:

$$M\left(\frac{1}{2};0;0\right), N\left(\frac{1}{2};1;0\right).$$

$$\overrightarrow{A'C} = (1;1;-1), \overrightarrow{MN} = (0;1;0), \overrightarrow{A'M} = \left(\frac{1}{2};0;-1\right)$$

$$[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = (1;0;1)$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C$ và MN là:

$$d(A'C, MN) = \frac{|[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] \cdot \overrightarrow{A'M}|}{|[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]|} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2. Viết phương trình mặt phẳng (P)

Phương trình đường thẳng $(A'C)$ nhận $\overrightarrow{A'C}$ làm vectơ chỉ phương có dạng:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

(P) chứa đường thẳng $A'C$ nên có phương trình:

$$m(x-y) + n(x+z-1) = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0) \Leftrightarrow (m+n)x - my + nz - n = 0.$$

(P) và (Oxy) có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n} = (m+n; -m; n)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$

$$\text{Ta có: } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| |\vec{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \frac{|n|}{\sqrt{(m+n)^2 + m^2 + n^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 6n^2 = (m+n)^2 + m^2 + n^2$$

$$\Leftrightarrow 2n^2 - mn - m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = m \\ n = -\frac{m}{2} \end{cases}$$

• Với $n = m$: chọn $m = n = 1$

$$\Rightarrow (P): 2x - y + z - 1 = 0.$$

• Với $n = -\frac{m}{2}$: chọn $m = 2, n = -1$

$$\Rightarrow (P): x - 2y - z + 1 = 0.$$

Vậy có hai mặt phẳng (P) cần tìm là:

$$2x - y + z - 1 = 0; \quad x - 2y - z + 1 = 0.$$

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2x) + 2(1 - \cos 2x)}} dx$$

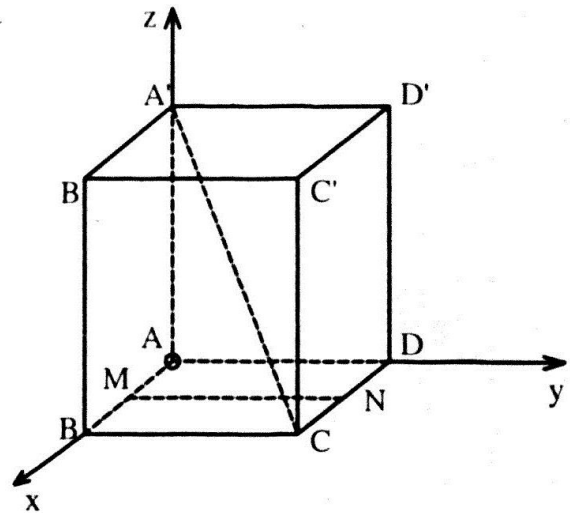
$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{5 - 3\cos 2x}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{5 - 3\cos 2x} \Rightarrow t^2 = 5 - 3\cos 2x \Rightarrow 2t dt = 6 \sin 2x dx \Rightarrow \sin 2x dx = \frac{1}{3} t dt$$

Đổi cận:

x	0	$\frac{\pi}{2}$
t	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$

$$I = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{t dt}{t} = \frac{\sqrt{2}}{3} \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} dt = \frac{\sqrt{2}}{3} t \Big|_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{2}{3}.$$



2. Tìm giá trị lớn nhất của A

Ta có:

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{x^3 y^3}$$

$$= \frac{(x+y)^2 \cdot xy}{x^3 y^3} = \left(\frac{x+y}{xy} \right)^2, \text{ do } (x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$$

Đặt $\begin{cases} S = x + y \\ P = x \cdot y \end{cases}$

Theo giả thiết, ta có: $SP = S^2 - 3P, S \neq 0, P \neq 0 \Leftrightarrow P = \frac{S^2}{S+3}$

Mặt khác: $S^2 - 4P \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - \frac{4S^2}{S+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{S-1}{S+3} \geq 0 \Leftrightarrow S < -3 \vee S \geq 1$

Ngoài ra: $(x+y)xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0 \Rightarrow \frac{x+y}{xy} > 0$

Do đó: $\sqrt{A} = \frac{S}{P} = \frac{S+3}{S}$

Xét hàm số: $f(S) = \frac{S+3}{S}$, với $S < -3 \vee S \geq 1$

$$f'(S) = -\frac{3}{S^2} < 0, \forall S \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$$

Bảng biến thiên:

S	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(S)$	-			-
$f(S)$	1	0	4	1

Từ bảng biến thiên, ta thấy:

$$\max \sqrt{A} = \max f(S) = 4 \Leftrightarrow \max A = 16, \text{ đạt được khi: } S = 1 \Rightarrow P = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow x, y \text{ là nghiệm của phương trình: } X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$

Cách khác:

Ta có:

$$(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy}$$

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}$.

Ta có: $a + b = a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 3ab$

Mặt khác: $ab \leq \frac{1}{4}(a + b)^2$

$$\Rightarrow a + b = (a + b)^2 - 3ab \geq (a + b)^2 - \frac{3}{4}(a + b)^2 = \frac{1}{4}(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow (a + b)^2 - 4(a + b) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq a + b \leq 4$$

Khi đó: $A = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2 - ab) = (a + b)^2 \leq 16$

Vậy $\max A = 16$, khi $\begin{cases} a = b \\ a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

Câu Va.

1. Tìm tọa độ điểm M

$$M \in d_3 \Rightarrow M(2t; t)$$

Ta có: $d(M, d_1) = 2d(M, d_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|2t + t + 3|}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \frac{|2t - t - 4|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |3t + 3| = 2|t - 4|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3t + 3 = 2(t - 4) \\ 3t + 3 = -2(t - 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -11 \\ t = 1 \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M_1(-22; -11); M_2(2; 1)$.

2. Tìm hệ số của x^{26} trong khai triển nhị thức Niuton

Ta có: $(1 + x)^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$

Cho $x = 1$, ta được:

$$2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} + C_{2n+1}^{n+1} + \dots + C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n + C_{2n+1}^n + \dots + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^0$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n+1} = 2(C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n)$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n} = 1 + C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n$$

$$\Leftrightarrow 2^{2n} = 1 + 2^{20} - 1 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{20} \Leftrightarrow 2n = 20 \Leftrightarrow n = 10.$$

Khi đó: $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \left(\frac{1}{x^4}\right)^{10-k} (x^7)^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{11k-40}$

Hệ số của x^{26} là C_{10}^k , ứng với k thỏa mãn: $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy hệ số của x^{26} là: $C_{10}^6 = 210$.

Câu Vb.

. Giải phương trình

$$\text{Ta có: } 3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0 \Leftrightarrow 3 + 4.\left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 2.\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $t > 0$. Ta được:

$$\Rightarrow 2t^3 + t^2 - 4t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t+1)^2(2t-3) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \quad (\text{do } t > 0)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1$.

. Tính thể tích của khối tứ diện $OO'AB$

Kẻ đường sinh AA'

Điểm D là điểm đối xứng của A' qua O' và H là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng A'D

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BH \perp A'D \\ BH \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BH \perp (AOO'A')$$

$\Rightarrow BH$ là đường cao của hình chóp $OO'AB$

$\Rightarrow$ Thể tích của khối tứ diện $OO'AB$:

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle AOO'} \cdot BH$$

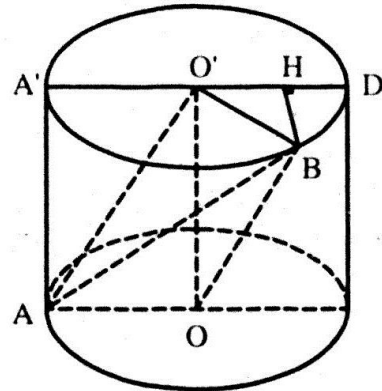
$\triangle AA'B$ vuông tại A' cho:

$$A'B = \sqrt{AB^2 - A'A^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow BD = \sqrt{A'D^2 - A'B^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a \Rightarrow \triangle BO'D \text{ đều} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle AOO' \text{ có } OA = OO' = a \text{ nên vuông cân tại O} \Rightarrow S_{\triangle AOO'} = \frac{1}{2} OA \cdot OO' = \frac{1}{2} a^2$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} a^2 = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}.$$



ĐỀ SỐ 38

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2006, KHỐI B

Thời gian làm bài: 180 phút.

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến đó vuông góc với tiệm cận xiên của (C) .

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4$.
2. Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm thực phân biệt:
 $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$.

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(0;1;2)$ và hai đường

thẳng: $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A , đồng thời song song với d_1 và d_2 .
2. Tìm tọa độ các điểm M trên d_1 , N trên d_2 sao cho 3 điểm A, M, N thẳng hàng.

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$.
2. Cho x, y là các số thực thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
 $A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và điểm $M(-3;1)$. Gọi T_1 và T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) . Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .

2. Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$). Biết rằng số tập con gồm 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập con gồm 2 phần tử của A. Tìm $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho số tập con gồm k phần tử của A là lớn nhất.

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải bất phương trình: $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC; I là giao điểm của BM và AC. Chứng minh rằng mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (SMB). Tính thể tích khối tứ diện ANIB.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số

$$y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2} = x - 1 + \frac{1}{x + 2} \quad (C)$$

- Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

- $y' = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -5 \\ x = -1 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

- Giới hạn và tiệm cận:

$$\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty \Rightarrow \text{Tiệm cận đứng } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x + 2} = 0 \Rightarrow \text{Tiệm cận xiên } y = x - 1$$

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+
y	$-\infty$		$\nearrow -5$	$\searrow -\infty$		$+\infty$	$\searrow -1$	$\nearrow +\infty$

- Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

- Đồ thị: hình bên

2. Viết phương trình tiếp tuyến

Tiệm cận xiên: $d: y = x - 1$

Gọi Δ là tiếp tuyến cần tìm

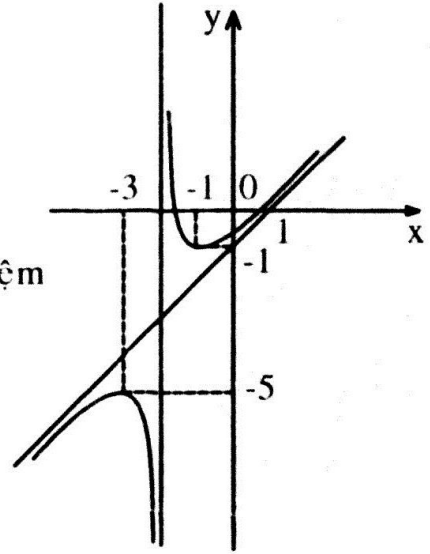
$\Delta \perp d$ nên có phương trình: $y = -x + b$.

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x - 1 + \frac{1}{x+2} = -x + b & (1) \\ 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = -1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x+2)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = -5 + 2\sqrt{2} \\ x = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = -5 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -x - 5 + 2\sqrt{2}$; $y = -x - 5 - 2\sqrt{2}$.



Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện:

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases}$$

Ta có: $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} \right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + m2\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + m\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + m\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + m\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

2. Tìm m

Ta có: $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 4x - 1 = mx \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x + 4 - \frac{1}{x} = m \end{cases} \quad (\text{do } x = 0 \text{ không là nghiệm của phương trình } \forall m)$$

Xét hàm số: $f(x) = 3x + 4 - \frac{1}{x}, x \geq -\frac{1}{2}$.

$$f'(x) = 3 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \geq -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) \text{ là hàm số đồng biến } \forall x \geq -\frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$			$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
		$\frac{9}{2}$			

Từ bảng biến thiên, ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$.

Cách khác

Ta có: $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = (2x + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ f(x) = 3x^2 - (m - 4)x - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa:

$$-\frac{1}{2} \leq x_1 < x_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_f > 0 \\ 3.f\left(-\frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ \frac{S}{2} > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 28 > 0, \forall m \\ 2m - 9 \geq 0 \\ m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{9}{2} \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m \geq \frac{9}{2}$.

Câu III.

1. Viết phương trình mặt phẳng (P)

d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là: $\vec{a} = (2; 1; -1)$, $\vec{b} = (1; -2; 1)$

(P) song song với d_1 và d_2 nên nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương

$\Rightarrow$ (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = -(1; 3; 5)$

Mặt khác: (P) đi qua A nên có phương trình:

$$1.(x-0) + 3.(y-1) + 5.(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 5z - 13 = 0.$$

Vậy (P): $x + 3y + 5z - 13 = 0$.

2. Tìm tọa độ điểm M

Đặt $M(2t_1; 1+t_1; -1-t_1) \in d_1$ và $N(1+t_2; -1-2t_2; 2+t_2) \in d_2$

$\Rightarrow \overline{AM} = (2t_1; t_1; -3-t_1)$, $\overline{AN} = (1+t_2; -2-2t_2; t_2)$

Ba điểm A, M, N thẳng hàng $\Leftrightarrow \overline{AM}$ và $\overline{AN}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{2t_1}{1+t_2} = \frac{t_1}{-2-2t_2} = \frac{-3-t_1}{t_2} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1(t_2+1) = 0 \\ 2t_1 + 6t_2 + t_1t_2 + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

Vậy điểm cần tìm là: $M(0; 1; -1), N(0; 1; 1)$.

Câu IV.

1. Tính tích phân

Ta có: $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2}$

Đặt $t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

Đổi cận:

x	$\ln 3$	$\ln 5$
t	3	5

$$I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{(t-1)(t-2)} = \int_3^5 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1} \right) dt = \ln \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{2}.$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} + |y-2|$$

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, ta xét các vectơ:

$$\vec{a} = (1-x; y) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$

$$\vec{b} = (x+1; y) \Rightarrow |\vec{b}| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (2; 2y) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = 2\sqrt{1+y^2}$$

Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}| \geq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \geq 2\sqrt{1+y^2} \Rightarrow A \geq 2\sqrt{1+y^2} + |y-2|$$

Xét hàm số: $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + |y-2|$

- Với $y \geq 2$: $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - 2 \geq 2\sqrt{1+y^2} \geq 2\sqrt{5} > 2 + \sqrt{3}$
- Với $y \leq 2$ lim : $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + 2 - y$
 $x \rightarrow \infty$

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2} = 2y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 1+y^2 = 4y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ y^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ta có: $f(2) = 2\sqrt{5}$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 2 + \sqrt{3} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Vậy $\min A = 2 + \sqrt{3}$, đạt được khi $x = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu Va.

1. Viết phương trình đường thẳng $T_1 T_2$.

(C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R=2$

Do $IM = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5} > R \Rightarrow$ Điểm M ở ngoài đường tròn (C).

Gọi (C') là đường tròn đường kính IM và I', R' lần lượt là tâm và bán kính của (C')

Ta có : • I' là trung điểm của IM $\Rightarrow I'(-1;2)$

$$\bullet R' = \frac{IM}{2} = \sqrt{5}$$

Phương trình đường tròn (C') : $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

Ta có : $\widehat{MT_1I} = \widehat{MT_2I} = 90^\circ$ nên T_1, T_2 thuộc đường tròn đường kính

$$IM \Rightarrow T_1, T_2 \in (C) \cap (C')$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng T_1T_2 là trục đẳng phương của (C) và (C')

Phương trình đường thẳng T_1T_2 có dạng :

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = x^2 + y^2 + 2x - 4y \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0.$$

Vậy $T_1T_2 : 2x + y - 3 = 0$.

2. Tìm k.

Tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 4$)

Số tập con gồm 4 phần tử của A là C_n^4

Số tập con gồm 2 phần tử của A là C_n^2

Theo giả thiết, ta có : $C_n^4 = 20C_n^2$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{4!(n-4)!} = 20 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} \Leftrightarrow \frac{1}{24} = \frac{20}{2(n-3)(n-2)} \Leftrightarrow (n-2)(n-3) = 240$$

$$\Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 18 \\ n = -13 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$C_{18}^k \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \begin{cases} C_{18}^k \geq C_{18}^{k-1} \\ C_{18}^k \geq C_{18}^{k+1} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 17)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{18!}{k!(18-k)!} \geq \frac{18!}{(k-1)!(19-k)!} \\ \frac{18!}{k!(18-k)!} \geq \frac{18!}{(k+1)!(17-k)!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{19-k} \\ \frac{1}{18-k} \geq \frac{1}{k+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \leq \frac{19}{2} \\ k \geq \frac{17}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{17}{2} \leq k \leq \frac{19}{2}.$$

Mà $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 9$. Vậy giá trị cần tìm là: $k = 9$.

Cách khác:

$$\text{Ta có: } a_k = C_{18}^k = \frac{18!}{k!(18-k)!}, \quad a_{k+1} = C_{18}^{k+1} = \frac{18!}{(k+1)!(17-k)!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k!(18-k)!}{(k+1)!(17-k)!} = \frac{18-k}{k+1}$$

- $a_{k+1} > a_k \Leftrightarrow 18-k > k+1 \Leftrightarrow k < \frac{17}{2}$
- $a_{k+1} < a_k \Leftrightarrow 18-k < k+1 \Leftrightarrow k > \frac{17}{2}$

Suy ra, khi $k \leq 8$ dãy số a_k tăng và $k \geq 9$ dãy số a_k giảm

Do đó: $\max_{k \in [0;17]} a_k = \max \{a_8 = C_{18}^8, a_9 = C_{18}^9\} = \max \{43758, 48620\} = 48620$.

$$\Rightarrow \max a_k = a_9 = 48620.$$

Vậy giá trị cần tìm là: $k = 9$.

Câu Vb.

1. Giải bất phương trình

$$\text{Ta có: } \log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 16 + \log_5 5 + \log_5(2^{x-2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 80 + \log_5(2^{x-2} + 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_5(4^x + 144) < \log_5 [80(2^{x-2} + 1)]$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 144 < 80(2^{x-2} + 1) \Leftrightarrow 4^x - 20 \cdot 2^x + 64 < 0$$

Đặt $t = 2^x$ ($t > 0$), ta được: $t^2 - 20t + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < t < 16$

$$\Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $2 < x < 4$.

2.

• Chứng minh (SAC) $\perp$ (SMB):

Gọi $\{H\} = AC \cap BD$ thì H là trung điểm của AC và BD

$\Rightarrow I$ là trọng tâm ΔABD

$$\Rightarrow AI = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{AC}{2} = \frac{AC}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \text{ với } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$$

ΔABM vuông tại A cho:

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{AB^2 + \left(\frac{AD}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow BI = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Ta có: } AI^2 + BI^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{9} = a^2 = AB^2 \Rightarrow \Delta AIB \text{ vuông tại } I \Rightarrow BM \perp AC$$

Mặt khác: $BM \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$)

$\Rightarrow BM \perp (SMB) \Rightarrow (SAC) \perp (SMB)$ (đpcm).

• Tính thể tích khối tứ diện ANIB

Thể tích khối tứ diện ANIB là:

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta AIB} \cdot HN = \frac{1}{6}AI \cdot BI \cdot HN = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}, \text{ với } HN = \frac{1}{2}SA = \frac{a}{2}$$

Cách khác

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ, ta có :

$A(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(a; a\sqrt{2}; 0)$, $D(0; a\sqrt{2}; 0)$, $S(0; 0; a)$

M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC nên ta có:

$$M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right).$$

• Chứng minh $(SAC) \perp (SMB)$

Mặt phẳng (SAC) có cặp vectơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{SA} = (0; 0; -a), \overrightarrow{SC} = (a; a\sqrt{2}; -a)$$

$\Rightarrow (SAC)$ có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n}_1 = [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SC}] = (a^2\sqrt{2}; -a^2; 0)$$

Mặt phẳng (SMB) có cặp vectơ chỉ phương là:

$$\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a), \overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -a\right)$$

$\Rightarrow (SMB)$ có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n}_2 = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SM}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ta có: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = -a^4 + a^4 = 0$

Vậy: $(SAC) \perp (SMB)$ (đpcm).

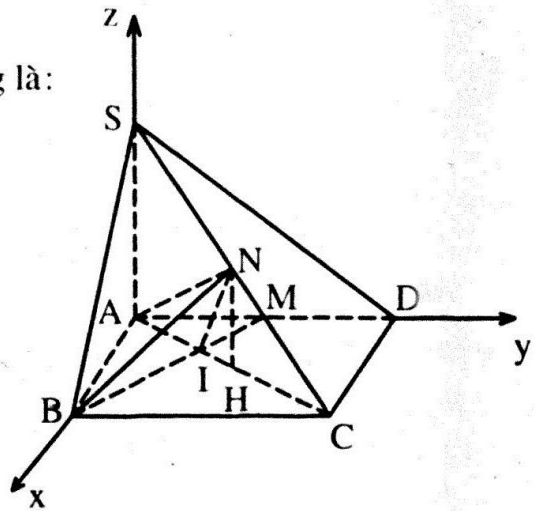
• Tính thể tích khối tứ diện ANIB

I là trọng tâm $\triangle ABD \Rightarrow I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right)$, $\overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$, $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$.

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{6}; \frac{a^2}{6}; 0\right)$$

Thể tích khối tứ diện ANIB là: $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}] \cdot \overrightarrow{AB}| = \frac{1}{6} \left| \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.



ĐỀ SỐ 39

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG NĂM 2006, KHỐI D

Thời gian làm bài: 180 phút.

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm).

Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(3; 20)$ và có hệ số góc là m . Tìm m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm phân biệt.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.
2. Giải phương trình $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1; 2; 3)$ và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}; d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$$

1. Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua đường thẳng d_1 .
2. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 .

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$.
2. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a \end{cases}$$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ và đường thẳng $d: x - y + 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm M nằm trên đường thẳng d sao cho đường tròn tâm M , có bán kính gấp đôi bán kính đường tròn (C) , tiếp xúc ngoài với đường tròn (C) .
2. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

- Giải phương trình: $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$.
- Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên các đường thẳng SB và SC. Tính thể tích khối chóp A.BCNM.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$	
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$		4		0	$+\infty$

- Tính lồi lõm và điểm uốn:
 $y'' = 6x$
 $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2$

x	$-\infty$		0	$+\infty$
y''		-	0	+
Đồ thị		lồi	Đ.U I(0;2)	lõm

- Điểm đặc biệt:
 $x = 0 \Rightarrow y = 2$
 $y = 0 \Rightarrow x = -2 \vee x = 1$.
- Đồ thị:

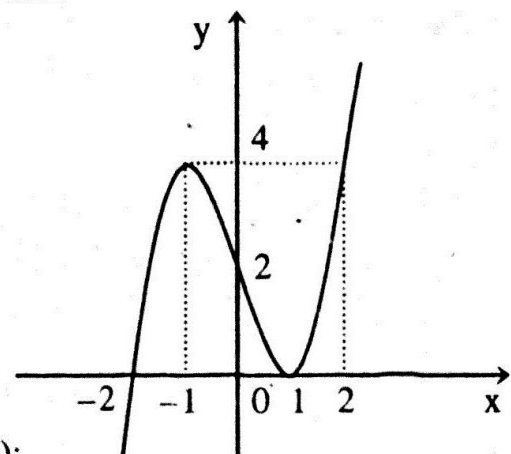
2. Tìm m

Phương trình đường thẳng d có dạng

$$y = m(x - 3) + 20$$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$x^3 - 3x + 2 = m(x - 3) + 20$$



$$\Leftrightarrow x^3 - 3x - 18 = m(x - 3) \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6) - m(x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 6 - m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ g(x) = x^2 + 3x + 6 - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(3) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 15 > 0 \\ 24 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{15}{4} \\ m \neq 24 \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m > \frac{15}{4}, m \neq 24$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có: $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (\cos 3x - \cos x) + (\cos 2x - 1) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin 2x \sin x - 2 \sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin x (\sin 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow -2 \sin x (2 \sin x \cos x + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin^2 x (2 \cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = k\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

2. Giải phương trình

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{2x-1}, t \geq 0 \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2}$

Ta có: $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow t + \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{t^2+1}{2}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^4 - 4t^2 + 4t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2+2t-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 + \sqrt{2} \\ t = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

- $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

- $t = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow 2x-1 = (-1+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{2}$.

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là: $x = 1 \vee x = 2 - \sqrt{2}$.

Câu III.

1. Tìm tọa độ của A' đối xứng của A qua d_1

d_1 và d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là: $\vec{a} = (2; -1; 1)$, $\vec{b} = (-1; 2; 1)$

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d_1 thì (α) nhận $\vec{a}$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$$2(x-1) - 1(y-2) + 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0.$$

Tọa độ giao điểm $\{H\} = d_1 \cap (\alpha)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(0; -1; 2).$$

A' là đối xứng của A qua d_1 nên H là trung điểm của AA'

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 0 - 1 = -1 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = -2 - 2 = -4 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = 4 - 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow A'(-1; -4; 1).$$

2. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A vuông góc d_1 và cắt d_2

Gọi $\{B\} = d_2 \cap (\alpha)$ thì tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1} \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + z = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow B(2; -1; -2).$$

Δ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B nên có vectơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{AB} = (1; -3; -5)$$

Phương trình của Δ có dạng: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$.

Câu IV.

1. Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x-2) \cdot e^{2x} \cdot dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x - 2 \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{cases}$$

$$I = \left(\frac{1}{2} (x-2) \cdot e^{2x} \right) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = -\frac{1}{2} e^2 + 1 - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}e^2 + 1 - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{5 - 3e^2}{4}.$$

2. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\text{Xét: } \begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) & (1) \\ y - x = a \quad (a > 0) & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $x > -1, y > -1. (2) \Leftrightarrow y = x + a$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow e^x - e^{x+a} = \ln(1+x) - \ln(1+x+a)$

$$\Leftrightarrow e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+x+a) = 0 \quad (*)$$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; +\infty)$.

Xét hàm số: $f(x) = e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+x+a)$, với $x > -1$ và $a > 0$

Do $f(x)$ liên tục trong khoảng $(-1; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\text{Mặt khác: } f'(x) = e^{x+a} - e^x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+a+x}$$

$$= (e^a - 1)e^x + \frac{a}{(1+x)(1+a+x)} > 0, \forall x > -1 \text{ và } a > 0$$

$\Rightarrow f(x)$ đồng biến trong khoảng $(-1; +\infty)$

Suy ra, phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1; +\infty)$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất, $\forall a > 0$.

Câu Va.

1. Tìm tọa độ điểm M

(C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=1$. Đặt $M(t; t+3) \in d$

Đường tròn tâm M có bán kính: $R' = 2R = 2$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow IM = R + R' \Leftrightarrow IM^2 = 9$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 + (t+2)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow M_1(1;4) \\ t=-2 \Rightarrow M_2(-2;1) \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là: $M_1(1;4), M_2(-2;1)$.

2. Tìm số cách chọn

• Số cách chọn 4 học sinh tùy ý từ 12 học sinh là: $C_{12}^4 = 495$ cách.

• Số cách chọn 4 học sinh có trong cả 3 lớp:

Chọn 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C:

$$\text{Có } C_5^2 C_4^1 C_3^1 = 120 \text{ cách.}$$

Chọn 2 học sinh lớp B, 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp C:

Có $C_5^1 C_4^2 C_3^1 = 90$ cách.

Chọn 2 học sinh lớp C, 1 học sinh lớp A và 1 học sinh lớp B :

Có $C_5^1 C_4^1 C_3^2 = 60$ cách.

$\Rightarrow$ Số cách chọn 4 học sinh trong cả 3 lớp là: $120 + 90 + 60 = 270$ cách.

Vậy số cách chọn 4 học sinh thuộc không quá 2 trong 3 lớp là:

$$495 - 270 = 225 \text{ (cách).}$$

Câu Vb.

1. Giải phương trình

Ta có: $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2+x} - 2^{2x}) - 4(2^{x^2-x} - 1) = 0 \Leftrightarrow 2^{2x}(2^{x^2-x} - 1) - 4(2^{x^2-x} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^{x^2-x} - 1)(2^{2x} - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} - 1 = 0 \\ 2^{2x} - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2-x} = 1 \\ 2^{2x} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x = 0 \\ 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 0 \vee x = 1$.

2. Tính thể tích của khối chóp A.BCNM

Gọi V_1 là thể tích SAMN; V_2 là thể tích SABC; V là thể tích A.BCMN

$$\Rightarrow V = V_2 - V_1$$

Ta có: $\begin{cases} SA \perp (ABC) \\ AB = AC = a \end{cases} \Rightarrow SB = SC, AM = AN, SM = SN$

ΔSAB vuông tại A cho: $SA^2 = SM \cdot SB$

$$\Rightarrow SM = SN = \frac{SA^2}{SB} = \frac{4a^2}{a\sqrt{5}} = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$$

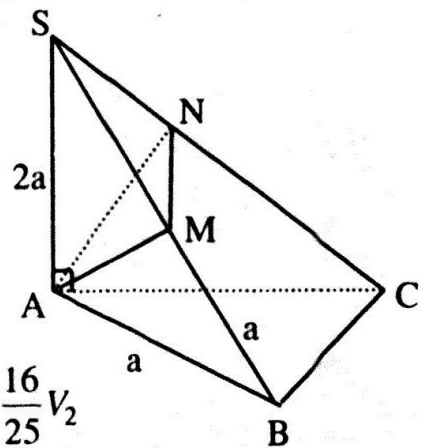
$$\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC} = \frac{\frac{4a\sqrt{5}}{5}}{a\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{V_1}{V_2} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \frac{16}{25} \Rightarrow V_1 = \frac{16}{25} V_2$$

$$\text{Ngoài ra: } V_2 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Do đó: } V = V_2 - \frac{16}{25} V_2 = \frac{9}{25} V_2 = \frac{9}{25} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{6} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{50}$$

Vậy thể tích của khối chóp A.BCNM là: $V = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{50}$.



ĐỀ SỐ 40

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x + 1}$.
2. Dựa vào đồ thị (C), tìm m để phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt: $x^2 + 2x + 5 = (m^2 + 2m + 5)(x + 1)$.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình : $\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2 + 3\sqrt{2}}{8}$.
2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^2 + 1 + y(y + x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y + x - 2) = y \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có $A(0;0;0), B(2;0;0), C(0;2;0), A'(0;0;2)$.

1. Chứng minh A'C vuông góc với BC'. Viết phương trình mặt phẳng (ABC').
1. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng B'C' trên mặt phẳng (ABC').

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$.
2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện: $x^2 + xy + y^2 \leq 3$. Chứng minh rằng: $-4\sqrt{3} - 3 \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{2} = 1$. Viết phương trình hypebol (H) có hai đường tiệm cận là $y = \pm 2x$ và có hai tiêu điểm là hai tiêu điểm của elip (E).
2. Áp dụng khai triển nhị thức Niuton của $(x^2 + x)^{100}$, chứng minh rằng:

$$100C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \dots - 199C_{100}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{199} = 0$$

(C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử)

Câu V.b (2 điểm)1. Giải bất phương trình: $\log_{x+1}(-2x) > 2$.2. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có các cạnh $AB = AD = a$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh A'D' và A'B'. Chứng minh AC' vuông góc với mặt phẳng (BDMN). Tính thể tích khối chóp A.BDMN.**GIẢI****Câu I.**1. **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{x^2 + 2x + 5}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1}$ • Miền xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ • $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \Rightarrow y = -4 \\ x = 1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$ • Giới hạn và tiệm cận: $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x+1 + \frac{4}{x+1} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x+1 \text{ là tiệm cận xiên}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-4	$+\infty$	4	$+\infty$	

• Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 5$

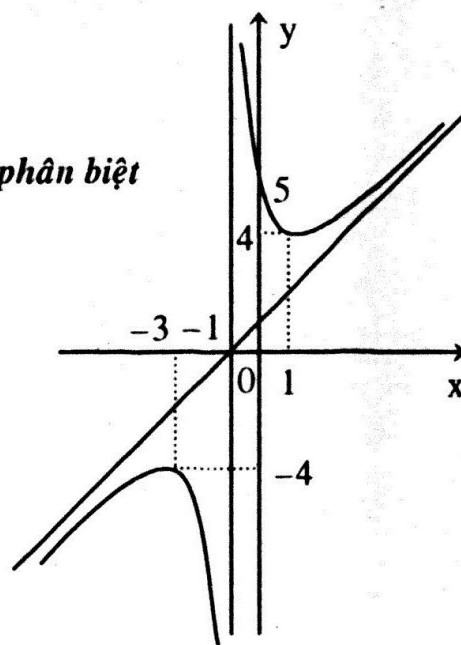
• Đồ thị:

2. **Tìm m để phương trình có hai nghiệm dương phân biệt**Ta có: $x^2 + 2x + 5 = (m^2 + 2m + 5)(x+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 5}{x+1} = m^2 + 2m + 5 \quad (\text{do } x > 0)$$

Số nghiệm của phương trình đã cho bằng số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng $y = m^2 + 2m + 5$.

Từ đồ thị (C) ở câu 1. ta thấy phương trình đã cho có 2 nghiệm dương phân biệt



$$\Leftrightarrow 4 < m^2 + 2m + 5 < 5 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 1 > 0 \\ m^2 + 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -2 < m < 0 \end{cases}$$

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có : • $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos 3x)$

• $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

Do đó : $\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\cos 3x(3\cos x + \cos 3x) - \frac{1}{4}\sin 3x(3\sin x - \sin 3x) = \frac{2+3\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 3x + \sin^2 3x + 3(\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x) = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Giải hệ phương trình

Nhận xét: $y = 0$ hệ phương trình vô nghiệm

Do đó: $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2 + 1)(y+x-2) = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x = 4 \\ \frac{x^2+1}{y} \cdot (y+x-2) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + (y+x-2) = 2 \\ \frac{x^2+1}{y} \cdot (y+x-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ y+x-2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ y = 3 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Câu III.

1. Chứng minh $AC' \perp BC'$. Viết phương trình mặt phẳng (ABC')

$C'(0; 2; 2)$, $\overrightarrow{A'C} = (0; 2; -2)$, $\overrightarrow{BC'} = (-2; 2; 2)$

Ta có: $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 = 0 \Rightarrow A'C \perp BC'$

$\vec{n} = \overrightarrow{A'C} = (0; 2; -2)$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC')

Phương trình mặt phẳng (ABC') có dạng: $0 \cdot (x - 0) + 2(y - 0) - 2(z - 0) = 0$

$$\Leftrightarrow y - z = 0.$$

2. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của $B'C'$ trên (ABC')

Ta có : $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = (-2; 2; 0)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa $B'C'$ và vuông góc với (ABC') thì (α) nhận $\overrightarrow{B'C'}, \vec{n}$ làm cặp vectơ chỉ phương $\Rightarrow (\alpha)$ có vectơ pháp tuyến : $\vec{n}_\alpha = [\overrightarrow{B'C'}, \vec{n}] = -4(1; 1; 1)$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $1.(x-0) + 1.(y-2) + 1.(z-2) = 0$

$$\Leftrightarrow x + y + z - 4 = 0.$$

Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của $B'C'$ trên mặt phẳng (ABC') thì $\Delta = (\alpha) \cap (ABC')$

Phương trình đường thẳng Δ có dạng:
$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Câu IV.

1. Tính tích phân $I = \int_2^6 \frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$

Đặt $t = \sqrt{4x+1} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{4} \Rightarrow dx = \frac{1}{2}t dt$

Đổi cận:

x	2	6
t	3	5

$$I = \int_3^5 \frac{t dt}{3(t+1)^2} = \int_3^5 \left[\frac{1}{t+1} - \frac{1}{(t+1)^2} \right] dt = \left(\ln|t+1| + \frac{1}{t+1} \right) \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{12}$$

2. Chứng minh : $-4\sqrt{3}-3 \leq x^2 - xy - 3y^2 \leq 4\sqrt{3}-3$

Đặt $u(x, y) = x^2 - xy - 3y^2$ và $v(x, y) = x^2 + xy + y^2$

Xét $y = 0$: Ta có : $v(x, y) = x^2 \leq 3 \Rightarrow u(x, y) = x^2$

$$\Rightarrow -4\sqrt{3}-3 \leq 0 \leq u(x, y) \leq 3 < 4\sqrt{3}-3 \quad (\text{bất đẳng thức luôn đúng})$$

Xét $y \neq 0$: Ta có : $0 < x^2 + xy + y^2 \leq 3$

Do đó : $u(x, y) = v(x, y) \cdot \frac{x^2 - xy - 3y^2}{x^2 + xy + y^2}$

Đặt $x = ky$, ta được: $u(x, y) = v(x, y) \cdot \frac{k^2 - k - 3}{k^2 + k + 1}$

Xét hàm số : $f(k) = \frac{k^2 - k - 3}{k^2 + k + 1}$

$$f'(k) = \frac{2(k^2 + 4k + 1)}{(k^2 + k + 1)^2}; f'(k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = -2 - \sqrt{3} \Rightarrow f(k_1) = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{3} \\ k_2 = -2 + \sqrt{3} \Rightarrow f(k_2) = \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

k	$-\infty$	k_1	k_2	$+\infty$	
$f'(k)$	+	0	-	0	+
$f(k)$	1 $f(k_1)$ $f(k_2)$ 1				

$$\Rightarrow f(k_2) \leq f(k) \leq f(k_1) \Rightarrow \frac{-3-4\sqrt{3}}{3} \leq f(k) \leq \frac{-3+4\sqrt{3}}{3}$$

Mặt khác : $0 < v(x, y) \leq 3 \Rightarrow -3-4\sqrt{3} \leq 0 < v(x, y) \cdot f(k) \leq -3+4\sqrt{3}$

$$\Rightarrow -3-4\sqrt{3} \leq u(x, y) \leq -3+4\sqrt{3} \quad (\text{đpcm}).$$

Câu Va.

1. Viết phương trình hypebol (H)

Elip (E) có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{10}; 0), F_2(\sqrt{10}; 0)$

(H) có cùng tiêu điểm với (E) nên phương trình của (H) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Phương trình các đường tiệm cận của (H) : $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm 2x \Rightarrow b = 2a$

Mặt khác : $a^2 + b^2 = c^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 + 4a^2 = 10 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Rightarrow b^2 = 4a^2 = 8$

Phương trình của (H) là : $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$.

2. Chứng minh

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } (x^2 + x)^{100} &= C_{100}^0 x^{200} + C_{100}^1 x^{198} \cdot x + C_{100}^2 x^{196} \cdot x^2 + \dots + C_{100}^{99} x^2 \cdot x^{99} + C_{100}^{100} x^{100} \\ &= C_{100}^0 x^{200} + C_{100}^1 x^{199} + C_{100}^2 x^{198} + \dots + C_{100}^{99} x^{101} + C_{100}^{100} x^{100} \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên, ta có :

$$100(x^2 + x)^{99}(2x + 1) = 200C_{100}^0 x^{199} + 199C_{100}^1 x^{198} + \dots + 101C_{100}^{99} x^{100} + 100C_{100}^{100} x^{99}$$

Thay $x = -\frac{1}{2}$, ta được :

$$\begin{aligned} 0 &= 200C_{100}^0 \left(-\frac{1}{2}\right)^{199} + 199C_{100}^1 \left(-\frac{1}{2}\right)^{198} + \dots + 101C_{100}^{99} \left(-\frac{1}{2}\right)^{100} + 100C_{100}^{100} \left(-\frac{1}{2}\right)^{99} \\ \Leftrightarrow 0 &= -200C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{199} + 199C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{198} - \dots + 101C_{100}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} - 100C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{99} \\ \Leftrightarrow 100C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \dots - 199C_{100}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{199} &= 0 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Câu Vb.

1. Giải bất phương trình

Điều kiện: $\begin{cases} -2x > 0 \\ x+1 > 0, x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0$

Khi đó: $0 < x+1 < 1$. Do đó: $\log_{x+1}(-2x) > 2 \Leftrightarrow 0 < -2x < (x+1)^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 + 4x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x < -2 - \sqrt{3} \vee x > -2 + \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow -2 + \sqrt{3} < x < 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $-2 + \sqrt{3} < x < 0$.

2. Chứng minh $AC' \perp (BCMN)$

Gọi O là tâm của đáy ABCD và $S = BN \cap AA'$

Ta có: $\begin{cases} A'N \parallel AB \\ A'N = \frac{1}{2} AB \end{cases} \Rightarrow A'N$ là đường trung bình của $\triangle SAB$

$\Rightarrow N$ là trung điểm của SA. Khi đó: S, M, D thẳng hàng và M là trung điểm của SD. $\triangle BAD$ có $AB = AD = a$, góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên là tam giác đều

$\Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3} = SA, CC' = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Hai tam giác vuông SAO và ACC' bằng nhau $\Rightarrow \widehat{ASO} = \widehat{CAC'} \Rightarrow AC' \perp SO$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (ACC'A') \Rightarrow BD \perp AC'$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $AC' \perp (BCMN)$.

• Tính thể tích khối chóp A.BCDMN

Gọi $H = AC' \cap SO, I = MN \cap SO$, ta có:

$\triangle SAO$ vuông tại A cho:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{OA^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{5}{3a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{15}}{5}$$

$$SO = \sqrt{SA^2 + OA^2} = \sqrt{3a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

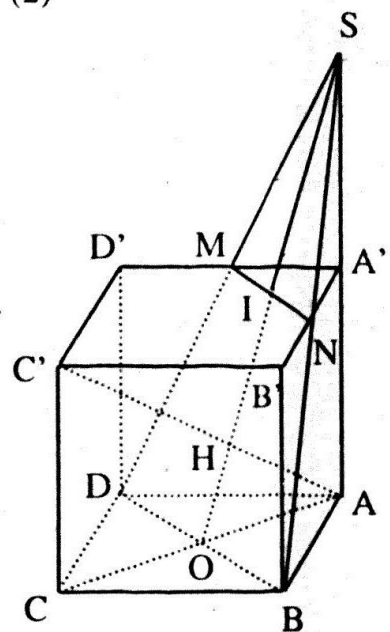
$$\frac{SI}{SO} = \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2} \Rightarrow SI = OI = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

Diện tích hình thang MNBD là:

$$S_{MNBD} = \frac{1}{2}(BD + MN) \cdot OI = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a}{2}\right) \cdot \frac{a\sqrt{15}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{16}$$

Tính thể tích khối chóp A.BCDMN là:

$$V = \frac{1}{3} S_{MNBD} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{15}}{16} \cdot \frac{a\sqrt{15}}{5} = \frac{3a^3}{16} \Rightarrow \text{Vậy } V = \frac{3a^3}{16}$$



ĐỀ SỐ 41

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^4}{4} - 2(x^2 - 1)$.
2. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0; 2)$ và tiếp xúc với (C).

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - z + 4 = 0$ và hai điểm $A(4; 0; 0), B(0; 4; 0)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

1. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (α) .
2. Xác định tọa độ điểm K sao cho IK vuông góc với mặt phẳng (α) , đồng thời K cách đều gốc tọa độ O và mặt phẳng (α) .

Câu IV (2 điểm)

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng $d: y = 2x + 1$.
2. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z} = 1$. Chứng minh rằng:
$$\frac{9^x}{3^x + 3^{y+z}} + \frac{9^y}{3^y + 3^{z+x}} + \frac{9^z}{3^z + 3^{x+y}} \geq \frac{3^x + 3^y + 3^z}{4}.$$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh A thuộc đường thẳng $d: x - 4y - 2 = 0$, cạnh BC song song với d, phương trình đường cao $BH: x + y + 3 = 0$ và trung điểm của cạnh AC là $M(1; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau? Tính tổng của tất cả các số tự nhiên đó.

Câu V.b (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại điểm N. Tính thể tích khối chóp S.BCNM.

GIẢI**Câu I.****1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số**

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- $y' = x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -2 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	+
y	$+\infty$	-2	2	-2	$+\infty$

- Tính lồi, lõm và điểm uốn: $y'' = 3x^2 - 4$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{2}{9}$

x	$-\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
y''	+	0	-	+
Đồ thị	lõm	Đ.U $I_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{2}{9}\right)$	lồi	Đ.U $I_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{2}{9}\right)$
				lõm

- Điểm đặc biệt:
 $y = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$
 $x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$

- Đồ thị:

2. Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(0; 2)$

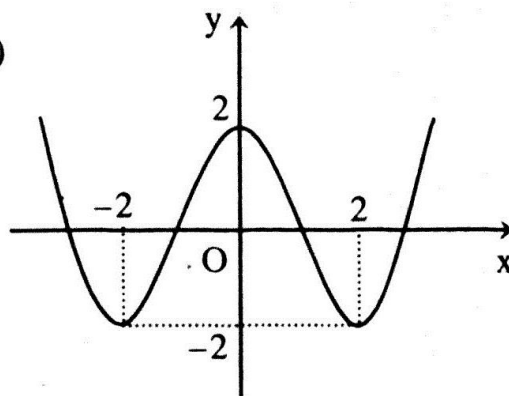
Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm

A với hệ số góc k có dạng : $y = kx + 2$

Δ tiếp xúc với (C)

$\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2 = kx + 2 & (1) \\ x^3 - 4x = k & (2) \end{cases}$$



Thế (2) vào (1), ta có : $\frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2 = (x^3 - 4x)x + 2 \Leftrightarrow x^2(3x^2 - 8) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow k = 0 \\ x = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow k = -\frac{8\sqrt{6}}{9} \\ x = -\frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow k = \frac{8\sqrt{6}}{9} \end{cases}$$

- $k = 0 \Rightarrow y = 2$

- $k = -\frac{8\sqrt{6}}{9} \Rightarrow y = -\frac{8\sqrt{6}}{9}x + 2$

- $k = \frac{8\sqrt{6}}{9} \Rightarrow y = \frac{8\sqrt{6}}{9}x + 2$

Vậy có ba tiếp tuyến cần tìm : $y = 2$; $y = -\frac{8\sqrt{6}}{9}x + 2$; $y = \frac{8\sqrt{6}}{9}x + 2$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có : $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 4\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + 4\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + 4\sin x + 1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 4\sin x + 2\sin^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sqrt{3}\cos x + \sin x + 2 = 0 \end{cases}$$

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

- $\sqrt{3}\cos x + \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x = -1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = k\pi \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Giải hệ phương trình

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 2(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x^3 - y^3) = 6(4x + y) \\ x^2 - 3y^2 = 6 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Thế (2) vào (1), ta được: } 3(x^3 - y^3) = (x^2 - 3y^2)(4x + y)$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + yx - 12y^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3y \\ x = -4y \end{cases}$$

- Với $x = 0$: $(2) \Leftrightarrow y^2 = -2$: vô nghiệm
- Với $x = 3y$: $(2) \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 3 \\ y = -1 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$
- Với $x = -4y$: $(2) \Leftrightarrow y^2 = \frac{6}{13} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x = -4\sqrt{\frac{6}{13}} \\ y = -\sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow x = 4\sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4\sqrt{\frac{6}{13}} \\ y = \sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4\sqrt{\frac{6}{13}} \\ y = -\sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases}$$

Cách khác

$$\text{Xét: } \begin{cases} x^3 - 8x = y^3 + 2y \\ x^2 - 3 = 3(y^2 + 1) \end{cases} \quad (I)$$

- Xét $x = 0$: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + 2y = 0 \\ y^2 = -2 \end{cases}$: vô nghiệm
- Xét $x \neq 0$. Đặt $y = tx$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 8x = t^3 x^3 + 2tx \\ x^2 - 3 = 3(t^2 x^2 + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t^3 - 1)x^2 = -2t - 8 & (1) \\ (3t^2 - 1)x^2 = -6 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow 3t^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (*)$$

Lấy (1) chia cho (2) vế theo vế, ta có :

$$\frac{t^3 - 1}{3t^2 - 1} = \frac{t + 4}{3} \Leftrightarrow 12t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad (\text{thỏa } (*))$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{3} : (2) \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \Rightarrow y = 1 \\ x = -3 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = -\frac{1}{4} : (2) \Leftrightarrow x^2 = \frac{16.6}{13} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4\sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow y = -\sqrt{\frac{6}{13}} \\ x = -4\sqrt{\frac{6}{13}} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -4\sqrt{\frac{6}{13}} \\ y = \sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4\sqrt{\frac{6}{13}} \\ y = -\sqrt{\frac{6}{13}} \end{cases}$$

Câu III.

1. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng AB với (α)

$$\overrightarrow{AB} = (-4; 4; 0) = 4(-1; 1; 0)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng AB có dạng : } \frac{x-4}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm $\{M\} = (AB) \cap (\alpha)$ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ z = 0 \\ 3x + 2y - z + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 16 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M(12; 16; 0).$$

Vậy : $M(12; 16; 0)$.

2. Tìm tọa độ điểm K

I là trung điểm của đoạn AB nên $I(2; 2; 0)$:

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 2; -1)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (α) thì Δ nhận $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = -t \end{cases}$$

Ta có : $KI \perp (\alpha) \Rightarrow K \in \Delta \Rightarrow K(2 + 3t; 2 + 2t; -t)$

$$\text{Mặt khác: } KO = d(K, (\alpha)) \Leftrightarrow \sqrt{(2+3t)^2 + (2+2t)^2 + t^2} = \frac{|14t+14|}{\sqrt{14}}$$

$$\Leftrightarrow 7t^2 + 10t + 4 = 7(t+1)^2 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4} \Rightarrow K\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right).$$

Câu IV.

1. Tính diện tích hình phẳng

Phương trình hoành độ các giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 - x + 3 = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 [(2x+1) - (x^2 - x + 3)] dx = \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{6} \text{ (đvdt)}. \end{aligned}$$

2. Chứng minh bất đẳng thức

Đặt $a = 3^x$, $b = 3^y$, $c = 3^z$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)

$$\text{Ta có: } 3^{-x} + 3^{-y} + 3^{-z} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow ab + bc + ca = abc \quad (*)$$

$$\text{Khử mẫu: } \frac{9^x}{3^x + 3^{y+z}} + \frac{9^y}{3^y + 3^{z+x}} + \frac{9^z}{3^z + 3^{x+y}} \geq \frac{3^x + 3^y + 3^z}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2+abc} + \frac{b^3}{b^2+abc} + \frac{c^3}{c^2+abc} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } a^2 + abc &= a^2 + ab + bc + ca \quad (\text{do } *) \\ &= a(a+b) + c(a+b) = (a+b)(a+c) \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự: } b^2 + abc = (b+c)(b+a); \quad c^2 + abc = (c+a)(c+b)$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$P = \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{a+c}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{64}} = \frac{3}{4}a \quad (1)$$

$$\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{b+a}{8} \geq \frac{3}{4}b \quad (2)$$

$$\frac{c^3}{(c+a)(c+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{c+b}{8} \geq \frac{3}{4}c \quad (3)$$

Cộng (1), (2) và (3) vế theo vế, ta có:

$$P + \frac{1}{2}(a+b+c) \geq \frac{3}{4}(a+b+c) \Leftrightarrow P \geq \frac{a+b+c}{4} \quad (\text{đpcm}).$$

Câu Va.

1. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC.

$AC \perp BH$ nên phương trình của AC có dạng: $x - y + C = 0$

$$M \in (AC) \Rightarrow C = 0 \Rightarrow (AC): x - y = 0.$$

$A = d \cap (AC)$ nên tọa độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - 4y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{2}{3} \Rightarrow A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

M là trung điểm của cạnh AC nên ta có:

$$\begin{cases} x_C = 2x_M - x_A = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \\ y_C = 2y_M - y_A = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right).$$

$(BC) \parallel d$ nên BC có phương trình: $x - 4y + C' = 0$ ($C' \neq -2$)

$$C \in (BC) \Rightarrow C' = 8 \Rightarrow (BC): x - 4y + 8 = 0$$

$B = (BC) \cap (BH)$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + y + 3 = 0 \\ x - 4y + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(-4; 1).$$

Vậy tọa độ ba đỉnh của tam giác ABC là: $A\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$, $B(-4; 1)$, $C\left(\frac{8}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

2. Đặt $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

• **Tìm các số:** Số cần tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ ($a_1 \neq 0$)

- Trước hết ta tìm các số có 5 chữ số khác nhau, kể cả các số có chữ số a_1 bằng 0 hoặc khác 0. Mỗi số như vậy ứng với một hoán vị của 5 phần tử thuộc A.

Do đó, có : $5! = 120$ (số).

- Tiếp theo ta tìm các số có 5 chữ số khác nhau, có dạng $\overline{0a_2 a_3 a_4 a_5}$. Mỗi số dạng này ứng với một hoán vị của 4 phần tử thuộc $A \setminus \{0\}$.

Vậy có : $4! = 24$ (số).

Suy ra các số có 5 chữ số khác nhau là : $120 - 24 = 96$ (số).

• **Tính tổng các số gồm 5 chữ số**

Trong 120 số có 5 chữ số khác nhau, kể cả các số có chữ số a_1 bằng 0 hoặc khác 0, có 24 số có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 0}$ (vì mỗi số $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ứng với một hoán vị của 4 phần tử thuộc $A \setminus \{0\}$).

Tương tự, có 24 số mà hàng đơn vị lần lượt là 1, 2, 3, 4

Do đó, tổng các chữ số thuộc hàng đơn vị của 120 số là :

$$24.(0+1+2+3+4) = 24.10 = 240.$$

Lập luận tương tự, ta cũng có tổng các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn, hàng vạn đều bằng 240.

Vậy tổng của 120 số trên là: $240.(1+10+10^2+10^3+10^4) = 2666640$.

Trong 24 số có 5 chữ số khác nhau dạng $\overline{0a_2 a_3 a_4 a_5}$, có 6 số mà hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn lần lượt là 1, 2, 3, 4. Do đó, tổng các chữ số hàng đơn vị, hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn đều bằng:

$$6.(1+2+3+4) = 60.$$

Tổng của 24 số này bằng: $60(1+10+10^2+10^3) = 66660$.

Vậy tổng của 96 số vừa tìm được là: $2666640 - 66660 = 2599980$.

Câu Vb.

1. Giải phương trình :

Điều kiện: $x > 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}$

Ta có: $\log_x 2 + 2\log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8 \Leftrightarrow \log_x 2 + 4\log_{2x} 2 = 6\log_{2x} 2$

$$\Leftrightarrow \log_x 2 - 2\log_{2x} 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{2}{\log_2 2x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} - \frac{2}{1 + \log_2 x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = 2$.

2. Tính thể tích khối chóp S.BCNM

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng

(ABCD) $\Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$

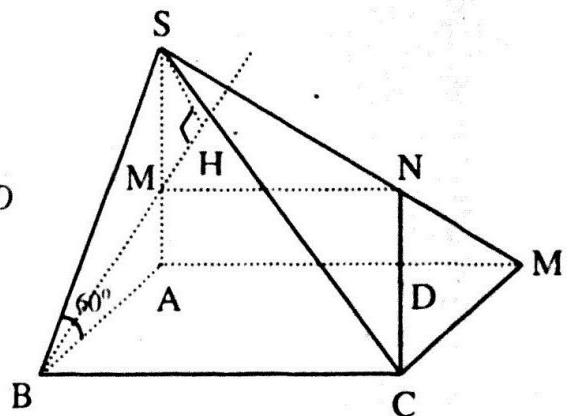
Mặt khác: $\begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow BC \parallel (SAD)$

$$\Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = MN \parallel BC \parallel AD$$

$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$\Rightarrow BC \perp BM$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BCNM là hình thang vuông có đường cao BM



ΔSAB vuông tại A cho: $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$

$$SB = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = 2a$$

Do $MN \parallel AD$ nên ta có: $\frac{MN}{AD} = \frac{SM}{SA}$

$$\Rightarrow MN = \frac{SM \cdot AD}{SA} = \frac{(SA - AM)AD}{SA} = \frac{\left(a\sqrt{3} - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right) \cdot 2a}{a\sqrt{3}} = \frac{4a}{3}$$

$$BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Diện tích hình thang BCNM là:

$$S = \frac{1}{2}(BC + MN) \cdot BM = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{4a}{3}\right) \cdot \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{10a^2\sqrt{3}}{9}$$

Kẻ $SH \perp BM$ tại H, ta có: $\begin{cases} SH \perp BM \\ SH \perp BC \text{ (do } BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (BCNM)$

$\Rightarrow SH$ là đường cao của hình chóp S.BCNM

Trong ΔSAB , ta có: $\frac{AB}{SB} = \frac{AM}{MS} = \frac{1}{2} \Rightarrow BM$ là phân giác của góc $\widehat{SBA}$

$$\Rightarrow \widehat{SBH} = 30^\circ \Rightarrow SH = SB \sin 30^\circ = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$$

Thể tích khối chóp S.BCNM là :

$$V = \frac{1}{3} S_{BCNM} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{10a^2\sqrt{3}}{9} \cdot a = \frac{10a^3\sqrt{3}}{27}$$

ĐỀ SỐ 42

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 3, NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Viết phương trình các tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A(0; -5)$.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $(2\sin^2 x - 1)\operatorname{tg}^2 2x + 3(2\cos^2 x - 1) = 0$.
2. Giải phương trình: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 4x-9 + 2\sqrt{3x^2-5x+2}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 2 \end{cases}, \Delta_2: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}.$$

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .
2. Xác định điểm A trên Δ_1 và điểm B trên Δ_2 sao cho đoạn AB có độ dài nhỏ nhất.

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_5^{10} \frac{dx}{x - 2\sqrt{x-1}}$.
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4\left(1 + \frac{7}{x^2}\right)}$, với $x > 0$.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại B, với $A(1; -1)$, $C(3; 5)$. Đỉnh B nằm trên đường thẳng $d: 2x - y = 0$. Viết phương trình các đường thẳng AB, BC.
2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số lẻ đó đứng cạnh nhau.

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0$.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^\circ$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), $SA = a$. Gọi C' là trung điểm của SC. Mặt phẳng (P) đi qua AC' và song song với BD, cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B', D'. Tính thể tích của khối chóp S.AB'C'D'.

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{x^2 - x - 1}{x+1} = x - 2 + \frac{1}{x+1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

• $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = -5 \\ x = 0 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty \Rightarrow x = -1$ là đường tiệm cận đứng

$\begin{cases} y = x - 2 + \frac{1}{x+1} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-5	$+\infty$	-1	$+\infty$	

• Điểm đặc biệt:

$x = 0 \Rightarrow y = -1$;

$y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}; x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

• Đồ thị: hình dưới

2. **Viết phương trình các tiếp tuyến với (C) đi qua điểm A(0; -5)**

Phương trình đường thẳng Δ đi qua A với hệ số góc k có dạng: $y = kx - 5$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ hệ phương trình sau có nghiệm:

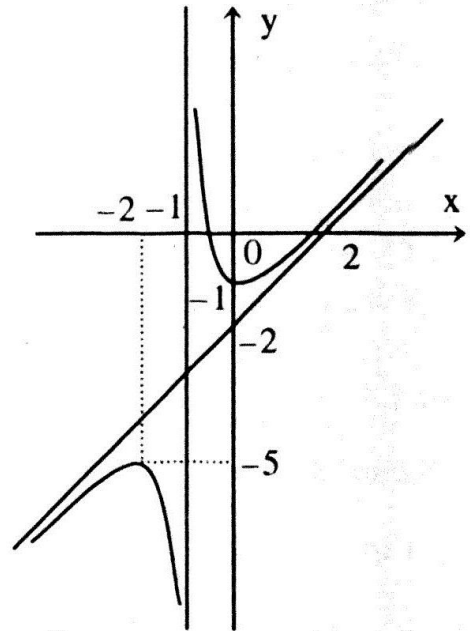
$$\begin{cases} x - 2 + \frac{1}{x+1} = kx - 5 & (1) \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được :

$$x - 2 + \frac{1}{x+1} = \left[1 - \frac{1}{(x+1)^2} \right] x - 5$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 8x + 4 = 0 \quad (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow k = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \Rightarrow k = -8 \end{cases}$$



Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là: $y = -5$; $y = -8x - 5$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ta có: $(2\sin^2 x - 1)\tan^2 2x + 3(2\cos^2 x - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow -\cos 2x \tan^2 2x + 3\cos 2x = 0 \Leftrightarrow \tan^2 2x = 3 \quad (\text{do } \cos 2x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \tan 2x = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Giải phương trình

Điều kiện: $x \geq 1$

Đặt $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}, (t \geq 0)$

$$\Rightarrow t^2 = 4x - 3 + 2\sqrt{(3x-2)(x-1)} \Rightarrow 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2} = t^2 - 6$$

Ta có: $t = t^2 - 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 5x + 2} = 6 - 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2x \geq 0 \\ 3x^2 - 5x + 2 = (6 - 2x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 19x + 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 17 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2$.

Câu III.**1. Viết phương trình mặt phẳng**

Δ_1 đi qua $M(1; -1; 2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; -1; 0)$.

Δ_2 đi qua $N(3; 1; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (-1; 2; 1)$.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. (α) chứa Δ_1 và song song với Δ_2 nên (α) đi qua điểm M và nhận $\vec{a}, \vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương $\Rightarrow (\alpha)$ có vectơ pháp tuyến:

$$\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = \left(\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-1; -1; 1)$$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng:

$$-1 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y+1) + 1 \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 2 = 0.$$

2. Tìm tọa độ của A và B

$$\text{Phương trình tham số của } \Delta_2 \text{ là: } \Delta_2 : \begin{cases} x = 3 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$$

Ta có: $A \in \Delta_1 \Rightarrow A(1+t; -1-t; 2)$

$$B \in \Delta_2 \Rightarrow B(3-t'; 1+2t'; t') \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-t-t'+2; t+2t'+2; t'-2)$$

AB là độ dài nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+3t' = 0 \\ t+2t' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = 0. \text{ Vậy } A(1; -1; 2) \text{ và } B(3; 1; 0).$$

Câu IV.**1. Tính tích phân:** $\int_5^{10} \frac{dx}{x-2\sqrt{x-1}}$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-1} \Rightarrow \begin{cases} x = t^2 + 1 \\ dx = 2t dt \end{cases}$$

Đổi cận:

x	5	10
t	2	3

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \frac{2t dt}{t^2 - 2t + 1} = 2 \int_2^3 \frac{(t-1) + 1}{(t-1)^2} dt = 2 \int_2^3 \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2} \right) dt \\ &= 2 \left(\ln|t-1| - \frac{1}{t-1} \right) \Big|_2^3 = 2 \ln 2 + 1. \end{aligned}$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = x + \frac{11}{2x} + \sqrt{4 \left(1 + \frac{7}{x^2} \right)} \quad (x > 0)$$

$$y' = 1 - \frac{11}{2x^2} - \frac{14}{x^3 \sqrt{1 + \frac{7}{x^2}}} = \frac{2x^2 \sqrt{x^2 + 7} - 11\sqrt{x^2 + 7} - 28}{2x^2 \sqrt{x^2 + 7}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 \sqrt{x^2 + 7} - 11\sqrt{x^2 + 7} - 28 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 7} \quad (x > 0 \Rightarrow t > \sqrt{7}) \Rightarrow x^2 = t^2 - 7$$

$$\text{Ta có: } 2(t^2 - 7)t - 11t - 28 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 25t - 28 = 0 \Rightarrow t = 4 \Leftrightarrow x = 3$$

Bảng biến thiên:

x	0	3	$+\infty$
y'		-	0
			+
y	$+\infty$	$\frac{15}{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có: $\min_{(0; +\infty)} y = \frac{15}{2}$, khi $x = 3$.

Cách khác

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có :

$$\begin{aligned} \left(3 + \frac{7}{x}\right)^2 &= \left(3 \cdot 1 + \sqrt{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{x}\right)^2 \leq (9 + 7) \left(1 + \frac{7}{x^2}\right) = 16 \left(1 + \frac{7}{x^2}\right) \\ \Rightarrow \sqrt{4 \left(1 + \frac{7}{x^2}\right)} &\geq \frac{1}{2} \left(3 + \frac{7}{x}\right) \\ \Rightarrow y &\geq x + \frac{11}{2x} + \frac{1}{2} \left(3 + \frac{7}{x}\right) = \frac{3}{2} + x + \frac{9}{x} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} \frac{3}{2} + 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \min_{(0; +\infty)} y = \frac{15}{2}, \text{ đạt được khi: } \begin{cases} \frac{3}{1} = \sqrt{7} \cdot \frac{x}{\sqrt{7}} \\ x = \frac{9}{x}, x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Câu Va.

1. Viết phương trình các cạnh AB và BC

$$\text{Ta có: } \overline{AB} = 2(1; 3)$$

Gọi M là trung điểm của cạnh AB thì $M(2; 2)$

Gọi Δ là đường trung trực của cạnh AB thì Δ qua M và nhận $\overline{AB}$ làm vectơ pháp tuyến.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ có dạng: } 1 \cdot (x - 2) + 3 \cdot (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0.$$

ΔABC cân tại B nên B thuộc trung trực của AC $\Rightarrow B = d \cap \Delta$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{7} \\ y = \frac{16}{7} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{8}{7}; \frac{16}{7}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{1}{7}(1; 23), \overrightarrow{BC} = \frac{1}{7}(13; 19)$$

Phương trình cạnh AB: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{23} \Leftrightarrow 23x - y - 24 = 0.$

Phương trình cạnh BC: $\frac{x-3}{13} = \frac{y-5}{19} \Leftrightarrow 19x - 13y + 8 = 0.$

2. Tìm số

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ ($a_1 \neq 0$)

Gọi a là nhóm hai chữ số lẻ.

– Trước hết ta tìm các số chẵn có 5 chữ số khác nhau thỏa yêu cầu bài toán, kể cả các số có chữ số a_1 bằng 0 hoặc khác 0.

- Chọn $a_5 \in \{0, 2, 4, 6\}$: có 4 cách.
- Chọn hai chữ số lẻ thuộc $\{1, 3, 5\}$ cho nhóm a : có C_3^2 cách.
- Chọn hai chữ số chẵn còn lại thuộc $\{0, 2, 4, 6\} \setminus \{a_5\}$: có C_3^2 cách.
- Hoán vị a và hai chữ số chẵn vừa chọn: có $3!$ cách.
- Đổi vị trí hai chữ số lẻ trong nhóm a : có 2 cách.

Vậy có 4. $C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot 3! \cdot 2 = 432$ (số).

– Tiếp theo ta tìm các số chẵn có 5 chữ số khác nhau thỏa yêu cầu bài toán, có dạng $\overline{0a_2a_3a_4a_5}$.

- Chọn $a_5 \in \{2, 4, 6\}$: có 3 cách.
- Chọn hai chữ số lẻ thuộc $\{1, 3, 5\}$ cho nhóm a : có C_3^2 cách.
- Chọn chữ số chẵn còn lại thuộc $\{2, 4, 6\} \setminus \{a_5\}$: có 2 cách.
- Hoán vị a và chữ số chẵn vừa chọn: có $2!$ cách.
- Đổi vị trí hai chữ số lẻ trong nhóm a : có 2 cách.

Vậy có 3. $C_3^2 \cdot 2 \cdot 2! \cdot 2 = 72$ (số).

– Suy ra các số chẵn có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng hai chữ số lẻ đứng cạnh nhau là: $432 - 72 = 360$ (số).

Câu Vb.

1. Giải phương trình

Điều kiện: $1 < x < 3$. Ta có: $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2 (x+1) + \log_2 (3-x) - \log_2 (x-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [(x+1)(3-x)] = \log_2 (x-1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(3-x) = x-1 \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

2. Tính thể tích hình chóp $S.AB'C'D'$

Gọi $O = AC \cap BD$ và $G = AC' \cap SO$. Do O, C' lần lượt là trung điểm các cạnh AC và SC nên G là trọng tâm của ΔSAC

Ta có:

$$\bullet \begin{cases} (P) // BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow (P) \text{ cắt } (SBD)$$

theo giao tuyến $B'D'$ qua G và song song với BD

$$\bullet \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AC'$$

$$\Rightarrow B'D' \perp AC' \quad (\text{do } B'D' // BD)$$

$$\bullet \begin{cases} AB = AD = a \\ \widehat{BAD} = 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \Delta ABD \text{ là tam giác đều}$$

$$\Rightarrow BD = a, AC = 2AO = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } A, \text{ cho: } SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$$

$$AC' = \frac{SC}{2} = a \Rightarrow \Delta SAC' \text{ đều có cạnh là } a$$

$$G \text{ là trọng tâm } \Delta SAC' \text{ nên ta có: } \frac{B'D'}{BD} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow B'D' = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}a$$

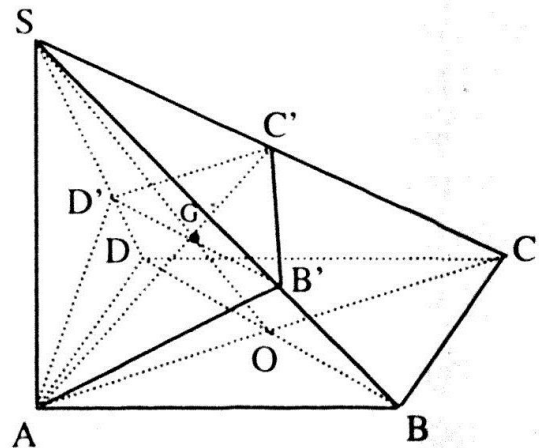
$$\text{Diện tích tứ giác } AB'C'D' \text{ là: } S_{AB'C'D'} = \frac{1}{2}AC' \cdot B'D' = \frac{1}{3}a^2$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên AC' , ta có:

$$\begin{cases} SH \perp AC' \\ SH \perp B'D' \end{cases} \Rightarrow SH \perp (AB'C'D') \Rightarrow SH \text{ là đường cao của khối chóp } S.AB'C'D'$$

$$SH \text{ cũng là đường cao của tam giác đều } SAC' \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } S.AB'C'D' \text{ là: } V = \frac{1}{3}S_{AB'C'D'} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$$



ĐỀ SỐ 43

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 4, NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 + (1 - 2m)x^2 + (2 - m)x + m + 2$ (m là tham số) (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 2$.
2. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại, điểm cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 13 \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): 2x + y - z + 5 = 0$ và các điểm $A(0; 0; 4), B(2; 0; 0)$.

1. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng AB trên mặt phẳng (P) .
2. Viết phương trình mặt cầu đi qua O, A, B và tiếp xúc với mặt phẳng (P) .

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3 - 2\ln x}{x\sqrt{1 + 2\ln x}} dx$.

2. Cho hai số dương x, y thay đổi thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2}$.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh $A(2; 1)$, đường cao qua đỉnh B có phương trình là $x - 3y - 7 = 0$ và đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình $x + y + 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C của tam giác.
2. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2 . Trên đường thẳng d_1 có 10 điểm phân biệt, trên đường thẳng d_2 có n điểm phân biệt ($n \geq 2$). Biết rằng có 2800 tam giác có các đỉnh là các điểm đã cho. Tìm n .

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0$.
2. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $A'.ABC$ là hình chóp tam giác đều, cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên $AA' = b$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$. Tính $\tan \alpha$ và thể tích của khối chóp $A'BB'C'C$.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số

Khi $m = 2 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 4$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4 \\ x = 2 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$
- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		0		$+\infty$

- Tính lồi lõm và điểm uốn:

$y'' = 6x - 6$. $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 2$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		-	0	+	
Đồ thị		lồi	Đ.Ư $I(1;2)$	lõm	

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 4$;
 $y = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2$

- Đồ thị:

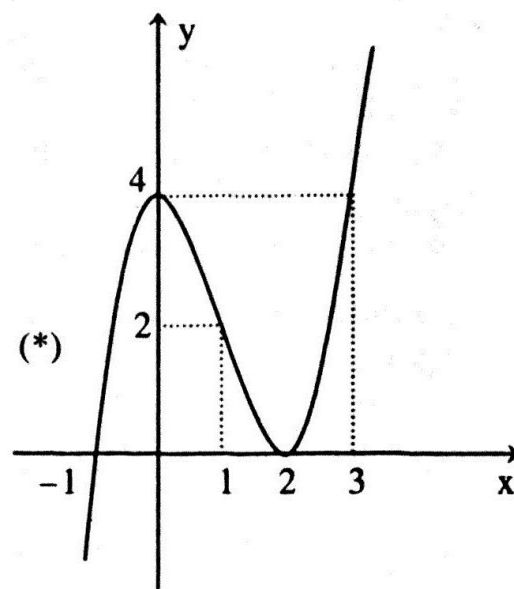
2. Tìm m

$y' = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m$

$y' = 0 \Leftrightarrow g(x) = 3x^2 + 2(1-2m)x + 2 - m = 0$ (*)

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa:

$x_1 < x_2 < 1$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m^2 - m - 5 > 0 \\ 3g(1) = 3(7 - 5m) > 0 \\ \frac{S}{2} = \frac{2m-1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{5}{4} \\ m < \frac{7}{5} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -1 \vee \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m < -1 \vee \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$.

Cách khác

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x qua hai nghiệm đó

$$\Leftrightarrow \Delta' = (1 - 2m)^2 - 3(2 - m) > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -1 \vee m > \frac{5}{4} \quad (a)$$

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \left(2m - 1 - \sqrt{4m^2 - m - 5} \right) \\ x_2 = \frac{1}{3} \left(2m - 1 + \sqrt{4m^2 - m - 5} \right) \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow x_{CT} = x_2 = \frac{1}{3} \left(2m - 1 + \sqrt{4m^2 - m - 5} \right) < 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4m^2 - m - 5} < 4 - 2m \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2m > 0 \\ 4m^2 - m - 5 < (4 - 2m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < \frac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{5} \quad (b)$$

Từ (a) và (b), ta có giá trị cần tìm là: $m < -1 \vee \frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$.

Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Ta có: } \cos 2x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x + (1 + 2\cos x)(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)[(\cos x + \sin x) - (1 + 2\cos x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - \sin x = 0 \\ \sin x - \cos x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet \sin x - \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi \vee x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = \pi + k2\pi$.

2. Giải hệ phương trình

$$\text{Xét: } \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (I)$$

- Xét $x=0$: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} -y^3 = 13 \\ -y^3 = 25 \end{cases}$: vô nghiệm

- Xét $x \neq 0$: Đặt $y = tx$, ta có:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(1-t)(1+t^2) = 13 & (1) \\ x^3(1+t)(1-t^2) = 25 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) vế theo vế, ta được: $\frac{(1-t)(1+t^2)}{(1+t)(1-t^2)} = \frac{13}{25} \quad (t \neq \pm 1)$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 13t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{2} \\ t = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Với $t = \frac{3}{2}$: $(1) \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -3$

Với $t = \frac{2}{3}$: $(1) \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Cách khác

Ta có: $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x+y)(x^2-y^2) = 25 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2+y^2) = 13 \\ (x-y)(x+y)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)[(x-y)^2 + 2xy] = 13 \\ (x-y)[(x-y)^2 + 4xy] = 25 \end{cases}$$

Đặt $u = x-y$, $v = xy$, ta có:

$$\begin{cases} u(u^2 + 2v) = 13 & (1) \\ u(u^2 + 4v) = 25 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) chia (2) vế theo vế, ta được: $\frac{u^2 + 2v}{u^2 + 4v} = \frac{13}{25} \quad (u \neq 0) \Leftrightarrow v = 6u^2$

Thế $v = 6u^2$ vào (1), ta có: $u^3 = 1 \Leftrightarrow u = 1 \Rightarrow v = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

Câu III.

1. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của AB trên (P)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2; 0; -4)$. (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; 1; -1)$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P) thì (Q) nhận $\overrightarrow{AB}, \vec{n}$ làm cặp vectơ chỉ phương $\Rightarrow$ (Q) có vectơ pháp tuyến: $\vec{n}' = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = 2(2; -3; 1)$

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng:

$$2x - 3y + 1.(z - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z - 4 = 0$$

Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của AB trên (P) thì $\Delta = (P) \cap (Q)$

Phương trình đường thẳng Δ có dạng:
$$\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

2. Viết phương trình mặt cầu

Gọi mặt cầu cần tìm là: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

Ta có: $O \in (S) \Rightarrow d = 0$

$$A \in (S) \Rightarrow 16 - 8c = 0 \Leftrightarrow c = 2$$

$$B \in (S) \Rightarrow 4 - 4a = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Khi đó: (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2by - 4z = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-b)^2 + (z-2)^2 = b^2 + 5$$

(S) có tâm $I(1; b; 2)$ và bán kính $R = \sqrt{b^2 + 5}$

Mặt khác: (S) tiếp xúc với (P) $\Leftrightarrow d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|b+5|}{\sqrt{6}} = \sqrt{b^2 + 5} \Leftrightarrow (b+5)^2 = 6(b^2 + 5) \Leftrightarrow b^2 - 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = 1$$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: (S): $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6$.

Câu IV.**1. Tính tích phân**

$$I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3 - 2 \ln x}{x \sqrt{1 + 2 \ln x}} dx$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{1 + 2 \ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 2 \ln x$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{t^2 - 1}{2} \Rightarrow \frac{dx}{x} = t dt$$

Đổi cận:

x	1	$\sqrt{e}$
t	1	$\sqrt{2}$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{3 - (t^2 - 1)}{t} \cdot t dt = \int_1^{\sqrt{2}} (4 - t^2) dt = \left(4t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = \frac{10\sqrt{2} - 11}{3}$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A

$$\text{Ta có: } A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2} = \frac{3}{4}x + \frac{1}{x} + \frac{2}{y^2} + y = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + 2 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{y}{8} + \frac{y}{8} \right) + \frac{x+y}{2}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

- $\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 1$
- $\frac{1}{y^2} + \frac{y}{8} + \frac{y}{8} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{8} \cdot \frac{y}{8}} = \frac{3}{4}$

$$\text{Theo giả thiết: } x + y \geq 4 \Rightarrow \frac{x+y}{2} \geq 2 \Rightarrow A \geq 1 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 = \frac{9}{2}$$

$$A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{1}{x} \\ x + y = 4 \Leftrightarrow x = y = 2. \\ \frac{1}{y^2} = \frac{y}{8} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \min A = \frac{9}{2}, \text{ khi } x = y = 2.$$

Câu Va.**1. Xác định tọa độ các đỉnh B và C**

$$\text{Đặt } BH: x - 3y - 7 = 0 \text{ và } CM: x + y + 1 = 0$$

$$AC \perp BH \text{ nên phương trình của AC có dạng: } 3x + y + C = 0$$

$$A \in AC \Rightarrow C = -7 \Rightarrow AC: 3x + y - 7 = 0$$

$C = AC \cap CM$ nên tọa độ của C là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 3x + y - 7 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C(4; -5). \quad B \in BH \Rightarrow B(3t + t; t)$$

M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3t + 9}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{t + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3t + 9}{2}; \frac{t + 1}{2}\right).$$

$$M \in CM \Rightarrow \frac{3t + 9}{2} + \frac{t + 1}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow B(-2; -3)$$

Vậy $B(-2; -3), C(4; -5)$.

2. Tìm n

• **Trường hợp 1:** Tam giác có một đỉnh trên d_1 và hai đỉnh trên d_2

Chọn một đỉnh trên d_1 có 10 cách.

Chọn hai đỉnh trên d_2 có C_n^2 cách

Trường hợp này có: $10C_n^2$ (tam giác).

• **Trường hợp 2:** Tam giác có một đỉnh trên d_2 và hai đỉnh trên d_1

Chọn một đỉnh trên d_2 có n cách.

Chọn hai đỉnh trên d_1 có C_{10}^2 cách

Trường hợp này có: nC_{10}^2 (tam giác).

Cả hai trường hợp có: $10C_n^2 + nC_{10}^2$ (tam giác).

Theo giả thiết, ta có: $10C_n^2 + nC_{10}^2 = 2800 \quad (n \geq 2, n \in \mathbf{N})$

$$\Leftrightarrow 10 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} + 45n = 2800 \Leftrightarrow 5(n-1)n + 45n = 2800$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 8n - 560 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 20 \\ n = -28 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $n = 20$.

Câu Vb.

1. Giải phương trình

$$\text{Ta có: } 9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 9 \cdot 9^{x^2+x-2} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 3^{x^2+x-2}, t > 0. \text{ Ta được: } 9t^2 - 10t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2+x-2} = 1 \\ 3^{x^2+x-2} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 + x - 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = -2 \\ x = 0 \vee x = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = -2$; $x = 0$; $x = \pm 1$.

2. Tính $\text{tg}\alpha$ và thể tích của khối chóp $A'BB'C'C$

Gọi H là tâm của ΔABC và M là trung điểm của BC

Do $A'.ABC$ là chóp tam giác đều nên $A'H$ là đường cao của hình chóp $A'.ABC$ đồng thời cũng là chiều cao của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BC \perp (A'AM) \Rightarrow BC \perp A'M$$

$\Rightarrow \widehat{A'MA} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$.

AM là đường cao của tam giác đều ABC, cạnh là a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} AH = \frac{2}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \\ HM = \frac{1}{3} AM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

$$A'H = \sqrt{A'A^2 - AH^2} = \frac{1}{3} \sqrt{9b^2 - 3a^2}$$

$\Delta A'HM$ vuông tại H, cho :

$$\text{tg}\alpha = \frac{A'H}{HM} = \frac{2\sqrt{3b^2 - a^2}}{a}$$

$$\text{Diện tích } \Delta ABC \text{ là : } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AM = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

Thể tích khối chóp $A'.ABC$ là :

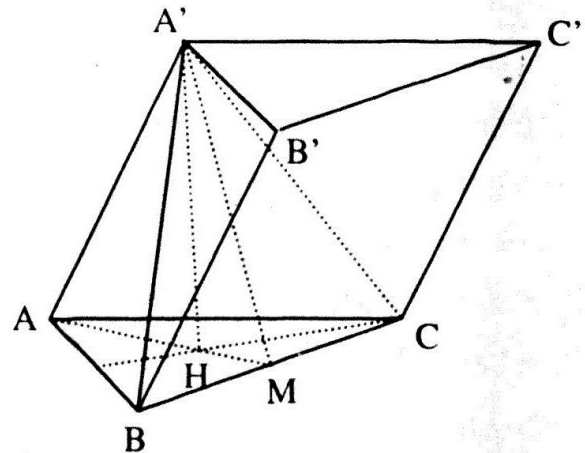
$$V_1 = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot A'H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{9b^2 - 3a^2} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{12}$$

Thể tích của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là :

$$V_2 = S_{ABC} \cdot A'H = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{9b^2 - 3a^2} = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{4}$$

$$\text{Thể tích khối chóp } A'BB'C'C \text{ là : } V = V_2 - V_1 = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{a^2 \sqrt{3b^2 - a^2}}{6}$$



ĐỀ SỐ 44

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 5, NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm). Cho hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x - \frac{11}{3}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Tìm trên đồ thị (C) hai điểm phân biệt M, N đối xứng nhau qua trục tung.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $4x - 3y + 11z - 26 = 0$

và hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}$, $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$.

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trên (P), đồng thời Δ cắt cả d_1 và d_2 .

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin 2x dx$.
2. Giải phương trình: $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1) \sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$.

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$ và điểm $A(-1; 1)$. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua A, gốc tọa độ O và tiếp xúc với đường thẳng d.
2. Một lớp học có 33 học sinh, trong đó có 7 nữ. Cần chia lớp học thành 3 tổ, tổ 1 có 10 học sinh, tổ 2 có 11 học sinh, tổ 3 có 12 học sinh sao cho trong mỗi tổ có ít nhất 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chia như vậy?

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_3(3^x - 1) \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$.
2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, gọi SH là đường cao của hình chóp. Khoảng cách từ trung điểm I của SH đến mặt bên (SBC) bằng b. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

- $y' = -x^2 + 2x + 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -\frac{16}{3} \\ x = 3 \Rightarrow y = \frac{16}{3} \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		$-\frac{16}{3}$		$\frac{16}{3}$		$-\infty$

- Tính lồi, lõm và điểm uốn:

$$y'' = -2x + 2. \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 0$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y''		+	0	-	
Đồ thị		lõm	Đ. U $I(1; 0)$	lồi	

- Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{11}{3};$$

$$y = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 1 \pm 2\sqrt{3}$$

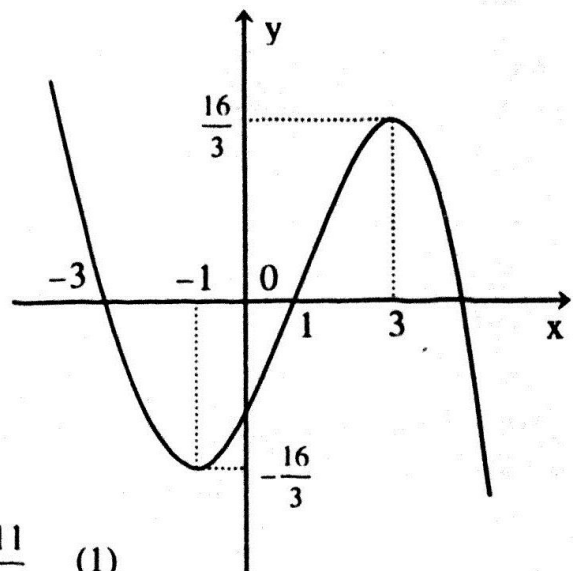
- Đồ thị:

2. Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua Oy

Đặt $M(x_0; y_0), N(-x_0; y_0)$ ($x_0 \neq 0$) là hai điểm đối xứng nhau qua trục Oy

Ta có: $M \in (C) \Rightarrow y_0 = -\frac{x_0^3}{3} + x_0^2 + 3x_0 - \frac{11}{3}$ (1)

$$N \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{x_0^3}{3} + x_0^2 - 3x_0 - \frac{11}{3} \quad (2)$$



Từ (1) và (2), ta có : $-\frac{x_0^3}{3} + x_0^2 + 3x_0 - \frac{11}{3} = \frac{x_0^3}{3} + x_0^2 - 3x_0 - \frac{11}{3} \Leftrightarrow x_0(x_0^2 - 9) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{16}{3} \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = \frac{16}{3} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là : $M\left(3; \frac{16}{3}\right); N\left(-3; \frac{16}{3}\right)$ hay ngược lại.

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có: $\cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x + \sin^3 x + 2\sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x \cos x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)[(1 - \sin x \cos x) - (\cos x - \sin x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)[\sin x(1 - \cos x) + 1 - \cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \cos x)(\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \cos x = 1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải hệ phương trình

Cách 1:

$$\text{Xét: } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (I)$$

$$\bullet \text{ Xét } x = 0: (I) \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -3y \\ y^2 = 7y^2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

$\Rightarrow x = y = 0$ là nghiệm của hệ phương trình.

$\bullet$ Xét $x \neq 0$:

Đặt $y = tx$:

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(1 - t + t^2) = 3x(1 - t) \\ x^2(1 + t + t^2) = 7x^2(1 - t)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - t + t^2) = 3(1 - t) \\ 1 + t + t^2 = 7(1 - t)^2 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } t = 2: (1) \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$$

$$+ \text{ Với } t = \frac{1}{2}: (1) \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm: } x = y = 0 \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Cách 2:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)^2 + xy = 3(x - y) \\ (x - y)^2 + 3xy = 7(x - y)^2 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x - y \\ v = xy \end{cases}, \text{ ta được: } \begin{cases} u^2 + v = 3u \\ u^2 + 3v = 7u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^2 - 3u = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } u = v = 0, \text{ ta có: } \begin{cases} x - y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$$

$$+ \text{ Với } u = v = 0, \text{ ta có: } \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm: } x = y = 0 \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Cách 3:

$$\text{Xét: } \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x - y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x - y)^2 \end{cases} \quad (1) \quad (x, y \in \mathbb{R}) \quad (I)$$

$$\text{Ta có: } (2) \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = 2y: (1) \Leftrightarrow y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 1 \Rightarrow x = 2 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } x = \frac{1}{2}y \Leftrightarrow y = 2x: (1) \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có nghiệm: } x = y = 0 \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Câu III.

1. Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau

d_1 đi qua điểm $A(0; 3; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-1; 2; 3)$

d_2 đi qua điểm $B(4; 0; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{b} = (1; 1; 2)$

Ta có: $[\vec{a}, \vec{b}] = (1; 5; -3)$, $\overrightarrow{AB} = (4; -3; 4)$

$$\Rightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \cdot 4 + 5 \cdot (-3) + (-3) \cdot 4 = -23 \neq 0.$$

Vậy d_1 và d_2 chéo nhau.

2. Viết phương trình đường thẳng Δ

Tọa độ giao điểm $M = d_1 \cap (P)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \\ 4x-3y+11z-26=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-3=0 \\ 3y-2z-11=0 \\ 4x-3y+11z-26=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=7 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 7; 5).$$

Tọa độ giao điểm $N = d_2 \cap (P)$ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2} \\ 4x-3y+11z-26=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-4=0 \\ 2y-z+3=0 \\ 4x-3y+11z-26=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow N(3; -1; 1).$$

Đường thẳng Δ nằm trên (P) và cắt cả d_1, d_2 nên đi qua hai điểm M, N

$\Rightarrow \Delta$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN} = (5; -8; -4)$.

Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\frac{x+2}{5} + \frac{y-7}{-8} = \frac{z-5}{-4}$.

Câu IV.

1. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin 2x dx$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+1 \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{cases}$$

$$I = -\frac{1}{2}(x+1)\cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

2. Giải phương trình

Ta có: $4^x - 2^{x+1} + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1) + 2(2^x - 1)\sin(2^x + y - 1) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[(2^x - 1)^2 + 2(2^x - 1) \cdot \sin(2^x + y - 1) + \sin^2(2^x + y - 1) \right] + 1 - \sin^2(2^x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1) \right]^2 + \cos^2(2^x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x - 1 + \sin(2^x + y - 1) = 0 & (1) \\ \cos(2^x + y - 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin(2^x + y - 1) = \pm 1$$

• Với $\sin(2^x + y - 1) = 1 : (1) \Leftrightarrow 2^x = 0$: vô nghiệm.

• Với $\sin(2^x + y - 1) = -1 : 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Thế $x = 1$ vào (1), ta có: $\sin(y + 1) = -1 \Leftrightarrow y + 1 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow y = -1 - \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1, y = -1 - \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Câu Va.

1. Viết phương trình đường tròn (C)

Gọi $I(a; b), R$ lần lượt là tâm và bán kính của (C)

(C) qua A, O và tiếp xúc với d nên ta có: $IA = IO = d(I, d) = R$

$$\begin{aligned} \bullet \quad IA = IO &\Leftrightarrow IA^2 = IO^2 \Leftrightarrow (1+a)^2 + (1-b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a - b + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow b = a + 1 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad IO = d(I, d) \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{|a - b + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(a - b + 1 - \sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (a+1)^2 = \frac{1}{2}[a - (a+1) + 1 - \sqrt{2}]^2 \quad (\text{do (1)})$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2a + 1 = 1 \Leftrightarrow a^2 + a = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow I(0; 1), R = 1 \\ a = -1 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow I(-1; 0), R = 1 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là: $(C_1): x^2 + (y-1)^2 = 1; (C_2): (x+1)^2 + y^2 = 1$

Cách khác

Giả sử phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Ta có: $O \in (C) \Rightarrow c = 0 \Rightarrow (C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$

$$A \in (C) \Rightarrow a - b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = a + 1$$

$$\text{Chi đó : } (C): x^2 + y^2 - 2ax - 2(a+1)y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-a)^2 + [y-(a+1)]^2 = 2a^2 + 2a + 1$$

$$\Rightarrow (C) \text{ có tâm } I(a; a+1) \text{ và bán kính } R = \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

$$C) \text{ tiếp xúc với } d \Leftrightarrow d(I, d) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|a - (a+1) + 1 - \sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2a^2 + 2a + 1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2a^2 + 2a + 1} = 1 \Leftrightarrow a^2 + a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là: $(C_1): x^2 + y^2 - 2y = 0$, $(C_2): x^2 + y^2 + 2x = 0$.

2. Tìm số cách chia lớp học thành ba tổ

Trường hợp 1. Chọn tổ 1 có 3 nữ và 7 nam, tổ 2 có 2 nữ và 9 nam, tổ 3 có 2 nữ và 10 nam

Chọn 3 nữ và 7 nam cho tổ 1: có $C_7^3 \cdot C_{26}^7$ cách.

Chọn 2 nữ và 9 nam cho tổ 2: có $C_4^2 \cdot C_{19}^9$ cách.

Chọn 2 nữ và 10 nam cho tổ 3: có $C_2^2 \cdot C_{10}^{10}$ cách.

Trường hợp này có: $C_7^3 \cdot C_{26}^7 \cdot C_4^2 \cdot C_{19}^9 \cdot C_2^2 \cdot C_{10}^{10} = 12760912164000$ (cách).

Trường hợp 2. Chọn tổ 1 có 2 nữ và 8 nam, tổ 2 có 3 nữ và 8 nam, tổ 3 có 2 nữ và 10 nam

Trường hợp này có: $C_7^2 \cdot C_{26}^8 \cdot C_3^3 \cdot C_{18}^8 \cdot C_2^2 \cdot C_{10}^{10} = 14356026184500$ (cách).

Trường hợp 3. Chọn tổ 1 có 2 nữ và 8 nam, tổ 2 có 2 nữ và 9 nam, tổ 3 có 3 nữ và 9 nam

Trường hợp này có: $C_7^2 \cdot C_{26}^8 \cdot C_5^2 \cdot C_{18}^9 \cdot C_3^3 \cdot C_9^9 = 15951140205000$ (cách).

Vậy số cách chia tổ là:

$$12760912164000 + 14356026184500 + 15951140205000 \\ = 43068078553500 \text{ (cách).}$$

Câu Vb.

1. Giải phương trình

$$\text{Điều kiện: } 3^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

$$\text{Ta có: } \log_3(3^x - 1) \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) \log_3[3(3^x - 1)] = 6$$

$$\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) [1 + \log_3(3^x - 1)] = 6$$

$$\text{Đặt } t = \log_3(3^x - 1), \text{ ta có:}$$

$$t(t+1)=6 \Leftrightarrow t^2+t-6=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(3^x-1)=2 \\ \log_3(3^x-1)=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x-1=9 \\ 3^x-1=\frac{1}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=10 \\ 3^x=\frac{28}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_3 10 \\ x=\log_3 \frac{28}{27} \end{cases}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là: $x = \log_3 10 \vee x = \log_3 \frac{28}{27}$.

2. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

S.ABCD là chóp đều nên H là tâm của đáy ABCD.

Gọi M là trung điểm của cạnh BC và J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I và H trên SM.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp HM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHM)$$

Mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SHM)$ theo giao tuyến SM

$$\Rightarrow HK \perp (SBC) \text{ và } IJ \perp (SBC) \Rightarrow IJ = d(I, (SBC)) = b$$

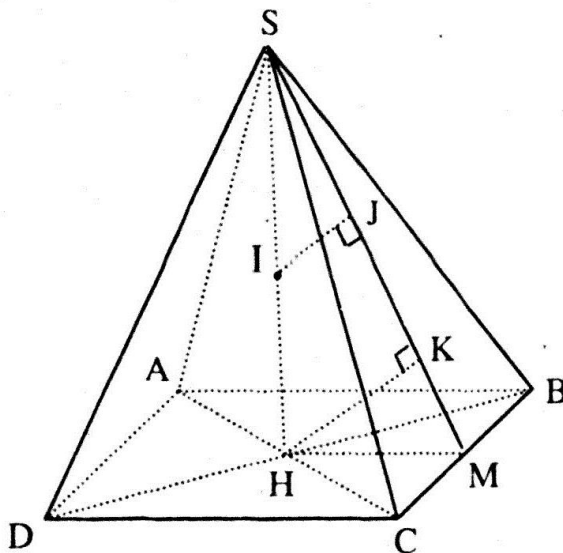
Do I là trung điểm của SH nên J là trung điểm của SK $\Rightarrow HK = 2IJ = 2b$

$\triangle SHM$ vuông tại H, ta có:

$$\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HM^2} \Leftrightarrow \frac{1}{4b^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{4}{a^2} \Rightarrow SH = \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

$$\text{Thể tích hình chóp S.ABCD là } V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{2ab}{\sqrt{a^2 - 16b^2}}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{2a^3b}{3\sqrt{a^2 - 16b^2}}.$$



ĐỀ SỐ 45

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 6, NĂM 2006

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Cho điểm $M_0(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại M_0 cắt các tiệm cận của (C) tại các điểm A và B. Chứng minh M_0 là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Câu II (2 điểm)

1. Giải phương trình: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$.
2. Giải phương trình: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Câu III (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(1; 2; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 3)$.

1. Viết phương trình đường thẳng qua O và vuông góc với mặt phẳng (ABC).
2. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa OA, sao cho khoảng cách từ B đến (P) bằng khoảng cách từ C đến (P).

Câu IV (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_1^2 (x-2) \ln x dx$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x-y \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 \end{cases}$$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chọn câu V.a hoặc câu V.b

Câu V.a Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng $4\sqrt{2}$, các đỉnh trên trục nhỏ và các tiêu điểm của (E) cùng nằm trên một đường tròn.
2. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau và mỗi số lập được đều nhỏ hơn 25000?

Câu V.b Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $2(\log_2 x + 1)\log_4 x + \log_2 \frac{1}{4} = 0$.
2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a và điểm K thuộc cạnh CC' sao cho $CK = \frac{2}{3}a$. Mặt phẳng (α) đi qua A, K và song song với BD chia khối lập phương thành hai khối đa diện. Tính thể tích hai khối đa diện đó.

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số:** $y = \frac{x+3}{x-1}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

• $y' = \frac{-4}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1$

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-		-	
y	1		$-\infty$	$+\infty$	1

• Điểm đặc biệt:

x	-1	0	2	3
y	-1	-3	5	3

• Đồ thị:

2. **Chứng minh M_0 là trung điểm của đoạn thẳng AB**

$$M_0(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1} = 1 + \frac{4}{x_0 - 1}$$

$$y'(x_0) = -\frac{4}{(x_0 - 1)^2}$$

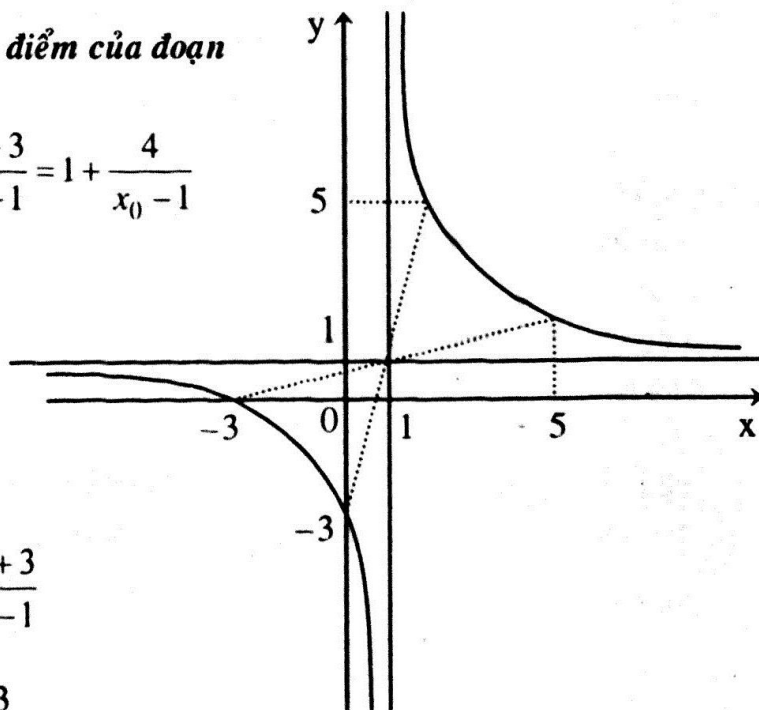
Phương trình tiếp tuyến

Δ của (C) tại M_0 có dạng:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-4}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{-4x}{(x_0 - 1)^2} + \frac{x_0^2 + 6x_0 - 3}{(x_0 - 1)^2}$$



Gọi A là giao điểm của Δ với tiệm cận đứng $x = 1$, ta có:

$$x=1 \Rightarrow y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(1-x_0) + \frac{x_0+3}{x_0-1} = \frac{x_0+7}{x_0-1} \Rightarrow A\left(1; \frac{x_0+7}{x_0-1}\right)$$

Gọi B là giao điểm của Δ với tiệm cận ngang $y=1$, ta có:

$$y=1 \Rightarrow 1 = -\frac{4}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{x_0+3}{x_0-1} \Leftrightarrow x = 2x_0-1 \Rightarrow B(2x_0-1; 1)$$

Ta có:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + 2x_0 - 1}{2} = x_0 \\ \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_0+7}{x_0-1} + 1\right) = \frac{x_0+3}{x_0-1} = y_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow M_0(x_0; y_0)$ là trung điểm của đoạn AB (đpcm).

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có: $4\sin^3 x + 4\sin^2 x + 3\sin 2x + 6\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 x(\sin x + 1) + 6\cos x(\sin x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\sin^2 x + 3\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)\left[2(1 - \cos^2 x) + 3\cos x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos^2 x - 3\cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos x = 2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Giải phương trình

Điều kiện: $1 \leq x \leq 7$

Ta có: $x + 2\sqrt{7-x} = 2\sqrt{x-1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7} + 1$

$$\Leftrightarrow (x-1) - 2\sqrt{x-1} + 2\sqrt{7-x} - \sqrt{(x-1)(7-x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}(\sqrt{x-1} - 2) - \sqrt{7-x}(\sqrt{x-1} - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} - \sqrt{7-x}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 2 \\ \sqrt{x-1} = \sqrt{7-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 4 \end{cases}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = 4 \vee x = 5$.

Câu III.

1. Viết phương trình đường thẳng qua O và vuông góc với (ABC).

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1; -2; 3)$

Mặt phẳng (ABC) nhận $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ làm cặp vectơ chỉ phương

$\Rightarrow (ABC)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (6; 3; 4)$

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm.

Δ qua O và vuông góc với (ABC) nên nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương

Phương trình đường thẳng Δ có dạng: $\frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$.

2. Viết phương trình mặt phẳng (P)

Đường thẳng OA nhận $\overrightarrow{OA}$ làm vectơ chỉ phương có phương trình:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

(P) chứa OA nên có phương trình:

$$m(2x - y) + nz = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0) \Leftrightarrow 2mx - my + nz = 0.$$

Ta có: $d(B, (P)) = d(C, (P))$

$$\Leftrightarrow \frac{4|m|}{\sqrt{4m^2 + m^2 + n^2}} = \frac{3|n|}{\sqrt{4m^2 + m^2 + n^2}} \Leftrightarrow 4|m| = 3|n|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{4}{3}m: \text{ chọn } m = 3, n = 4 \\ n = -\frac{4}{3}m: \text{ chọn } m = 3, n = -4 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là: $(P_1): 6x - 3y + 4z = 0$; $(P_2): 6x - 3y - 4z = 0$.

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$I = \int_1^2 (x-2) \ln x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = (x-2)dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}x^2 - 2x \end{cases}$$

$$I = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x \right) \ln x \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x}{2} - 2 \right) dx = -2 \ln 2 - \left(\frac{x^2}{4} - 2x \right) \Big|_1^2 \Rightarrow I = -2 \ln 2 + \frac{5}{4}.$$

Giải hệ phương trình

$$\text{Kết : } \begin{cases} \ln(1+x) - \ln(1+y) = x-y & (1) \\ x^2 - 12xy + 20y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện : $x > -1, y > -1$

$$2) \Leftrightarrow x^2 + 20y^2 = 12xy \Rightarrow xy \geq 0 \quad (*)$$

$$1) \Leftrightarrow \ln(1+x) - x = \ln(1+y) - y$$

Kết hàm số đặc trưng : $f(t) = \ln(1+t) - t, \quad t > -1$

$$f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$$

Bảng biến thiên:

t	-1	0	$+\infty$
$f'(t)$		+	-
$f(t)$		0	

$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow \infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình (1) có nghiệm $(x; y)$ với $x \neq y$ thì x, y phải là hai số trái dấu, nhưng điều đó không thỏa (*).

Vậy hệ đã cho chỉ có thể có nghiệm $(x; y)$ với $x = y$.

Thế $x = y$ vào hệ ta thấy $x = y = 0$ là nghiệm duy nhất của hệ.

Câu Va.

Lập phương trình elip (E)

Phương trình chính tắc của (E) có dạng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

(E) có các tiêu điểm $F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ và các đỉnh trên trục nhỏ $B_1(0; -b), B_2(0; b)$

Ta có :

Độ dài trục lớn : $2a = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

Tứ giác $F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi có bốn đỉnh cùng nằm trên một đường tròn nên là hình vuông $\Rightarrow b = c$.

Mặt khác : $b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = \frac{1}{2}a^2 = 4$.

Vậy phương trình chính tắc của elip (E) là: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Tìm số

Đặt $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Số cần tìm có dạng : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5} \quad (a_1 \neq 0)$

- Trường hợp 1. $a_1 = 1$

Chọn $a_5 \in \{0, 2, 4, 6\}$: có 4 cách.

Chọn 3 chữ số còn lại thuộc $A \setminus \{1, a_5\}$: có A_5^3 cách.

Trường hợp này có : $4 \cdot A_5^3 = 240$ (số).

- Trường hợp 2. $a_1 = 2, a_2 \in \{0, 4\}$

Chọn $a_2 \in \{0, 4\}$: có 2 cách.

Chọn $a_5 \in \{0, 4, 6\} \setminus \{a_2\}$: có 2 cách.

Chọn các chữ số còn lại thuộc $A \setminus \{a_1, a_2, a_5\}$: có A_4^2 cách.

Trường hợp này có : $2 \cdot 2 \cdot A_4^2 = 48$ (số).

- Trường hợp 3. $a_1 = 2, a_2 \in \{1, 3\}$

Chọn $a_2 \in \{1, 3\}$: có 2 cách.

Chọn $a_5 \in \{0, 4, 6\}$: có 3 cách.

Chọn các chữ số còn lại thuộc $A \setminus \{a_1, a_2, a_5\}$: có A_4^2 cách.

Trường hợp này có : $2 \cdot 3 \cdot A_4^2 = 72$ (số).

Vậy có tất cả : $240 + 48 + 72 = 360$ (số).

Câu Vb.

1. Giải phương trình

$$2(\log_2 x + 1) \log_4 x + \log_2 \frac{1}{4} = 0$$

Điều kiện: $x > 0$

$$\text{Ta có: } 2(\log_2 x + 1) \log_4 x + \log_2 \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x + 1) \log_2 x - 2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$, ta có: $(1) \Leftrightarrow t^2 + t - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình: $x = \frac{1}{4} \vee x = 2$.

2. Tính thể tích của khối đa diện

Gọi O, O' lần lượt là tâm của ABCD và A'B'C'D' và $I = AK \cap OO'$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (\alpha) // BD \\ BD \subset (BDD'B') \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (BDD'B') = MN // BD$$

ĐỀ SỐ 46

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI A, 2007

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH

Câu I (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$ (1) m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$
2. Tìm m để số (1) có cực đại và cực tiểu, đồng thời các điểm cực trị của đồ thị cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tam giác vuông tại O .

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình: $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$
2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực: $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}$

Câu III. (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

1. Chứng minh rằng d_1 và d_2 chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) :
 $7x + y - 4z = 0$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = (e+1)x$, $y = (1+e^x)x$
2. Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

PHẦN TỰ CHỌN: Thí sinh chỉ được chọn làm câu V.a hoặc V.b

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0; 2)$, $B(-2; -2)$ và $C(4; -2)$. Gọi H là chân đường cao kẻ từ B; M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và BC. Viết phương trình đường tròn đi qua các điểm H, M, N

2. Chứng minh rằng: $\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n}-1}{2n+1}$

(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải bất phương trình: $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD . Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích của khối tứ diện $CMNP$.

GIẢI

Câu I

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1 điểm)

Khi $m = -1$ ta có $y = \frac{x^2-3}{x+2} = x-2 + \frac{1}{x+2}$

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

• Sự biến thiên: $y' = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	-6	$+\infty$	-2	$+\infty$	

$y_{CD} = y(-3) = -6$, $y_{CT} = y(-1) = -2$

• Tiệm cận: Tiệm cận đứng $x = -2$

Tiệm cận xiên $y = x - 2$

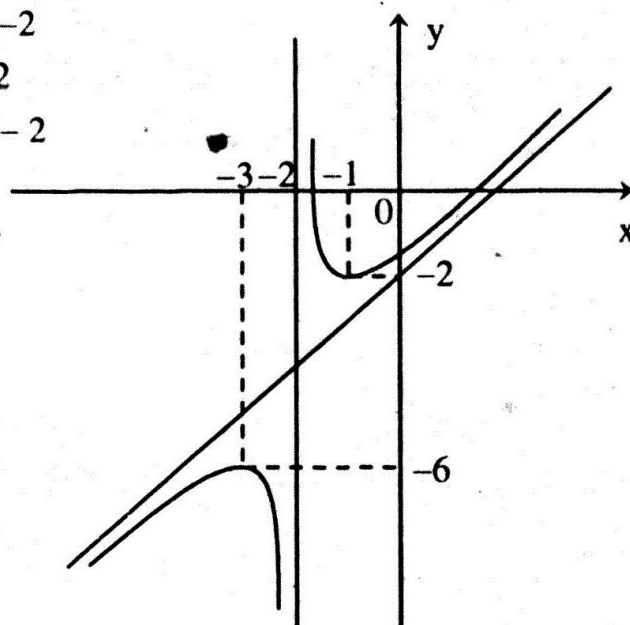
• Đồ thị:

2. Tìm m để hàm số có cực đại và cực tiểu và ... (1 điểm)

$y' = \frac{x^2+4x+4-m^2}{(x+2)^2}$

Hàm số (1) có cực đại và cực tiểu

$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 4x - m^2$ có 2 nghiệm phân biệt $x \neq -2$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 4 + m^2 > 0 \\ g(-2) = 4 - 8 + 4 - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0$$

Gọi A, B là các điểm cực trị $\Rightarrow A(-2 - m; -2)$, $B(-2 + m; 4m - 2)$.

Do $\overrightarrow{OA} = (-m - 2; -2) \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{OB} = (m - 2) \neq \vec{0}$ nên ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 8m + 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6} \text{ (thỏa mãn } m \neq 0).$$

Vậy giá trị m cần tìm là: $m = -4 \pm 2\sqrt{6}$

Câu II.

1. Giải phương trình lượng giác (1 điểm)

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x) - (\sin x + \cos x)^2$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Tìm m để phương trình có nghiệm (1 điểm)

Điều kiện: $x \geq 1$.

$$\text{Phương trình đã cho} \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = m \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}, \text{ khi đó (1) trở thành } -3t^2 + 2t = m \quad (2)$$

$$\text{Vì } t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt[4]{1 - \frac{2}{x+1}} \text{ và } x \geq 1 \text{ nên } 0 \leq t < 1.$$

Hàm số $f(t) = -3t^2 + 2t$, $0 \leq t < 1$ có bảng biến thiên:

t	0	1/3	1
f(t)	0	1/3	-1

$$\text{Phương trình đã cho có nghiệm} \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \in [0; 1) \Leftrightarrow -1 < m \leq \frac{1}{3}$$

Câu III

1. Chứng minh d_1 và d_2 chéo nhau (1 điểm)

+ d_1 qua $M(0; 1; -2)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$,

d_2 qua $N(-1; 1; 3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$

+ $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (-1; 2; 4)$ và $\overrightarrow{MN} = (-1; 0; 5)$

$$+ [\vec{u}_1; \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = 21 \neq 0 \Rightarrow d_1 \text{ và } d_2 \text{ chéo nhau}$$

2. Viết phương trình đường thẳng d (1 điểm)

Giả sử d cắt d_1 và d_2 lần là A, B . Vì $A \in d_1, B \in d_2$ nên

$$A(2s; 1-s; -2+s), B(-1+2t; 1+t; 3) \Rightarrow \vec{AB} = (2t-2s-1; t+s; -s+5)$$

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (7; 1; -4)$. $AB \perp (P) \Leftrightarrow \vec{AB}$ cùng phương với $\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{2t-2s-1}{7} = \frac{t+s}{1} = \frac{-s+5}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 5t+9s+1=0 \\ 4t+3s+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(2; 0; -1), B(-5; -1; 3). \text{ Phương trình của } d \text{ là: } \frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

Câu IV

1. Tính diện tích hình phẳng (1 điểm)

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng đã cho là:

$$(e+1)x = (1+e^x)x \Leftrightarrow (e^x - e)x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 1$$

$$\text{Diện tích của hình cần tìm là: } S = \int_0^1 |xe^x - ex| dx = e \int_0^1 x dx - \int_0^1 xe^x dx$$

$$\text{Ta có: } e \int_0^1 x dx = \frac{ex^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{e}{2}, \int_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x \Big|_0^1 = 1$$

$$\text{Vậy } S = \frac{e}{2} - 1 \text{ (đvdt)}$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của P (1 điểm)

Ta có: $x^2(y+z) \geq 2x\sqrt{x}$. Tương tự $y^2(z+x) \geq 2y\sqrt{y}$, $z^2(x+y) \geq 2z\sqrt{z}$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}}$$

$$\text{Đặt } a = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y}, b = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z}, c = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x}$$

$$\text{Suy ra: } x\sqrt{x} = \frac{4c+a-2b}{9}, y\sqrt{y} = \frac{4a+b-2c}{9}, z\sqrt{z} = \frac{4b+c-2a}{9}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P &\geq \frac{2}{9} \left(\frac{4c+a-2b}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} + \frac{4b+c-2a}{a} \right) \\ &= \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - 6 \right] \geq \frac{2}{9} (4 \cdot 3 + 3 - 6) = 2 \end{aligned}$$

$$\left(\text{Do } \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} = \left(\frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) + \left(\frac{b}{a} + 1 \right) - 1 \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} - 1 \geq 4 - 1 = 3 \right.$$

$$\left. \text{hoặc } \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \geq 3\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}} = 3. \text{ Tương tự: } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \right)$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2

Câu V. a

1. Viết phương trình đường tròn (1 điểm)

Ta có $M(-1; 0)$, $N(1; -2)$, $\overrightarrow{AC} = (4; -4)$. Giả sử $H(x, y)$. Ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \\ H \in AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+2) - 4(y+2) = 0 \\ 4x + 4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow H(1; 1)$$

Giả sử phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (1)

Thay tọa độ của M, N, H vào (1) ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} 2a - c = 1 \\ 2a - 4b + c = -5 \\ 2a + 2b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$.

2. Chứng minh công thức tổ hợp (1 điểm)

Ta có:

$$(1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}, (1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 x + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}$$

$$\Rightarrow (1+x)^{2n} - (1-x)^{2n} = 2(C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1})$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \int_0^1 (C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}) dx$$

$$\bullet \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \frac{(1+x)^{2n-1} + (1-x)^{2n-1}}{2(2n+1)} \Big|_0^1 = \frac{2^{2n} - 1}{2n+1} \quad (1)$$

$$\bullet \int_0^1 (C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}) dx$$

$$= \left(C_{2n}^1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_{2n}^3 \cdot \frac{x^4}{4} + C_{2n}^5 \cdot \frac{x^6}{6} + \dots + C_{2n}^{2n-1} \cdot \frac{x^{2n}}{2n} \right) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Câu V.b

1. Giải bất phương trình logarit (1 điểm)

Điều kiện: $x > \frac{3}{4}$. Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2$

$$\Leftrightarrow (4x-3)^2 \leq 9(2x+3) \Leftrightarrow 16x^2 - 42x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{8} \leq x \leq 3$$

Kết hợp điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là: $\frac{3}{4} < x \leq 3$

2. Chứng minh $AM \perp BP$ và tính

thể tích khối tứ diện $CMNP$ (1 điểm)

Gọi H là trung điểm của AD . Do $\triangle SAD$ đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp BP$ (1)

Xét hình vuông $ABCD$ ta có: $\triangle CDH = \triangle BCP$.

$\Rightarrow CH \perp BP$ (2). Từ (1) và (2)

suy ra $BP \perp (SHC)$. Vì $MN \parallel SC$ và

$AN \parallel CH$ nên $(AMN) \parallel (SHC)$.

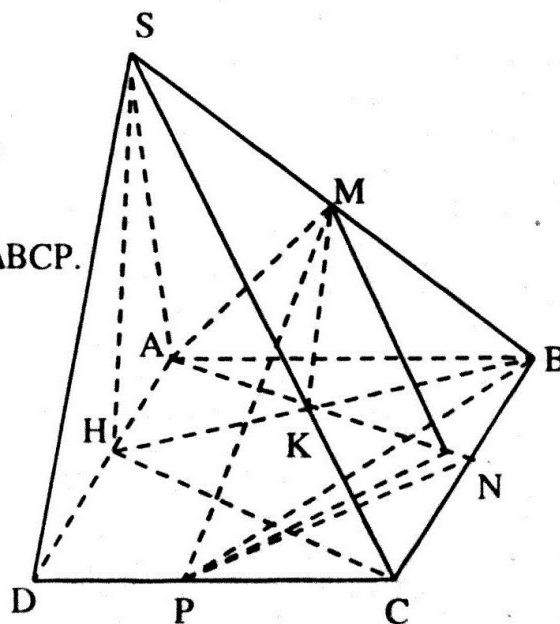
Suy ra $BP \perp (AMN) \Rightarrow BP \perp AM$.

Kẻ $MK \perp (ABCD)$, $K \in (ABCD)$.

Ta có: $V_{CMNP} = \frac{1}{3}MK \cdot S_{CNP}$

$$\text{Vì } MK = \frac{1}{2}SH = \frac{a\sqrt{3}}{4}, S_{CNP} = \frac{1}{2}CN \cdot CP = \frac{a^2}{8}$$

$$\text{nên } V_{CMNP} = \frac{\sqrt{3} \cdot a^3}{96} \text{ (đvtt)}$$



ĐỀ SỐ 47

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI B, 2007

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$ (1), m là tham số

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$
2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị của đồ thị hàm số (1) cách đều gốc toạ độ O

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình: $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$.
2. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m , phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt: $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x - 2)}$

Câu III. (2 điểm)

Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S):

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \text{ và mặt phẳng (P): } 2x - y + 2z - 14 = 0$$

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.
2. Tìm toạ độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Câu IV. (2 điểm)

1. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường: $y = x \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox
2. Cho x, y, z là ba số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

PHẦN TỰ CHỌN (Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai câu: V.a hoặc V.b)

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển nhị thức Newton của $(2 + x)^n$, biết: $3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048$
(n là số nguyên dương, C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử)
2. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ Oxy, cho điểm $A(2; 2)$ và các đường thẳng: $d_1: x + y - 2 = 0$, $d_2: x + y - 8 = 0$

Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu V.b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

- Giải phương trình: $(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$
- Cho hình chóp tứ diện đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA, M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1 điểm)

Khi $m = 1$ ta có $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Sự biến thiên: $y' = -3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	-	0	+	-
y	$+\infty$	$\searrow -4$	$\nearrow 0$	$\searrow -\infty$

$y_{CB} = y(2) = 0$, $y_{CT} = y(0) = -4$

- Đồ thị:

2. Tìm m để hàm số (1) có cực đại, cực tiểu ... (1 điểm)

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 3(m^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

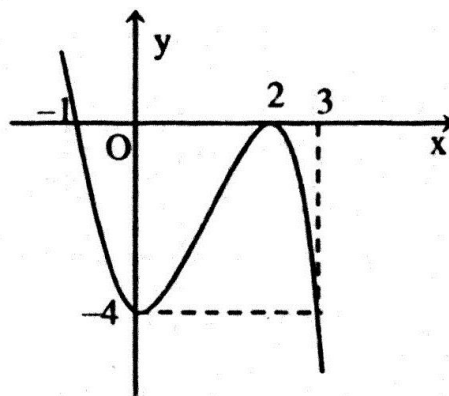
Hàm số (1) có cực trị

$\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi A, B là 2 điểm cực trị $\Rightarrow A(1 - m; -2 - m^3)$, $B(1 + m; -2 + 2m^3)$

O cách đều A và B $\Leftrightarrow OA = OB \Leftrightarrow 8m^3 = 2m \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$ (vì $m \neq 0$)



Câu II.

1. Giải phương trình lượng giác (1. điểm)

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\sin 7x - \sin x + 2\sin^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$$

- $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$
- $\sin 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Chứng minh phương trình có hai nghiệm

Điều kiện : $x \geq 2$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$(x-2)(x^3 + 6x^2 - 32 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^3 + 6x^2 - 32 - m = 0 \end{cases}$$

Ta chứng minh phương trình: $x^3 + 6x^2 - 32 = m$ (1) có một nghiệm trong khoảng $(2; +\infty)$

Xét hàm $f(x) = x^3 + 6x^2 - 32$ với $x > 2$. Ta có:

$$f'(x) = 3x^2 + 12x > 0, \quad \forall x > 2$$

Bảng biến thiên:

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy với mọi $m > 0$, phương trình (1) luôn có một nghiệm trong khoảng $(2; +\infty)$

Vậy với mọi $m > 0$ phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thực phân biệt

Câu III.

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) (1 điểm)

(S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$ có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

Mặt phẳng (Q) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $R = 3$ nên (Q) chứa I. (Q)

có cặp vectơ chỉ phương là: $\vec{OI} = (1; -2; -1)$, $\vec{i} = (1; 0; 0)$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của (Q) là: $\vec{n} = (0; -1; 2)$

Phương trình của (Q) là: $0.(x-0) - 1.(y-0) + 2.(z-0) = 0 \Leftrightarrow y - 2z = 0$.

2. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu sao cho khoảng cách lớn nhất (1 điểm)

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P). Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B. Nhận xét: nếu $d(A; (P)) \geq d(B; (P))$ thì $d(M; (P))$ lớn nhất khi $M \equiv A$

$$\text{Phương trình đường thẳng d: } \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Tọa độ giao điểm của d và (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2(y+2)^2 + (z+1)^2 = 9 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được hai giao điểm $A(-1; -1; -3)$, $B(3; -3; 1)$

Ta có: $d(A; (P)) = 7 \geq d(B; (P)) = 1$

Vậy khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất khi $M(-1; -1; -3)$

Câu IV.

1. Tính thể tích vật thể tròn xoay (1 điểm)

Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x \ln x$ và $y = 0$ là:

$$x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục hoành là:

$$V = \pi \int_1^e y^2 dx = \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx$$

Đặt $u = \ln^2 x, dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx, v = \frac{x^3}{3}$. Ta có:

$$\int_1^e (x \ln x)^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx$$

Đặt $u = \ln x, dv = x^2 dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^3}{3}$. Ta có

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9} \Big|_1^e = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

$$\text{Vậy } V = \frac{\pi(5e^3 - 2)}{27} \text{ (đvtt)}$$

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của P (1 điểm)

$$\text{Ta có: } P = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}$$

$$\text{Do } x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + y^2}{2} + \frac{y^2 + z^2}{2} + \frac{z^2 + x^2}{2} \geq xy + yz + zx$$

$$\text{Nên } P \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \right)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}$ với $t > 0$. Lập bảng biến thiên của $f(t)$ ta suy ra

$$f(t) \geq \frac{3}{2}, \forall t > 0. \text{ Suy ra: } P \geq \frac{9}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{2}$

Câu V.a

1. Tìm hệ số trong khai triển(1 điểm)

$$\text{Ta có: } 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = (3-1)^n = 2^n$$

Từ giả thiết suy ra $n = 11$.

Hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển Niuton của $(2+x)^{11}$ là:

$$C_{11}^{10} \cdot 2^1 = 22$$

2. Xác định tọa độ điểm B, C sao cho ...(1 điểm)

Vì $B \in d_1, C \in d_2$ nên $B(b; 2-b), C(c; 8-c)$. Từ giả thiết ta có hệ:

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ AB = AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bc - 4b - c + 2 = 0 \\ b^2 - 2b = c^2 - 8c + 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(c-4) = 2 \\ (b-1)^2 - (c-4)^2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x = b-1, y = c-4 \text{ ta có hệ } \begin{cases} xy = 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $x = -2, y = -1$ hoặc $x = 2, y = 1$

Suy ra: $B(-1; 3), C(3; 5)$ hoặc $B(3; -1), C(5; 3)$

Câu V.b

1. Giải phương trình mũ (1 điểm)

Đặt $(\sqrt{2}-1)^x = t (t > 0)$, ta có phương trình:

$$t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}-1, t = \sqrt{2}+1$$

Với $t = \sqrt{2}-1$ ta có $x = 1$.

Với $t = \sqrt{2}+1$ ta có $x = -1$.

2. (1 điểm)

Gọi P là trung điểm của SA. Ta có

MNCP là hình bình hành nên MN

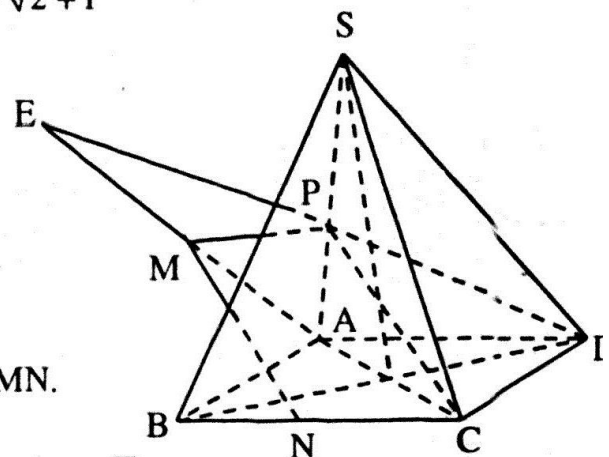
song song với mặt phẳng (SAC).

Mặt khác, $BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MN$.

Vì $MN \parallel (SAC)$ nên $d(MN; AC)$

$$= d(N; (SAC)) = \frac{1}{2} d(B; (SAC)) = \frac{1}{4} BD = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{Vậy } d(MN; AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$



ĐỀ SỐ 48

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC, CAO ĐẲNG, KHỐI D, 2007

Thời gian làm bài : 180 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số $y = \frac{2x}{x+1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai trục Ox, Oy tại A, B và tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{4}$

Câu II. (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$
2. Tìm giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4) và

đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$

1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua trọng tâm G của tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân: $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$

2. Cho $a \geq b > 0$. Chứng minh rằng: $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$

PHẦN TỰ CHỌN (Thí sinh chỉ được chọn làm một trong hai câu: V.a hoặc V.b)

Câu V.a. Theo chương trình THPT không phân ban (2 điểm)

1. Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của: $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C):

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9 \text{ và đường thẳng: } d: 3x - 4y + m = 0$$

Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Câu V. b. Theo chương trình THPT phân ban thí điểm (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0$

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$, $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD).

GIẢI

Câu I

1. **Khảo sát biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1 điểm)**

Ta có $y = \frac{2x}{x+1} = 2 - \frac{2}{x+1}$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Sự biến thiên: $y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	+		+
y	2		2

- Tiệm cận: Tiệm cận đứng $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 2$.
- Đồ thị:

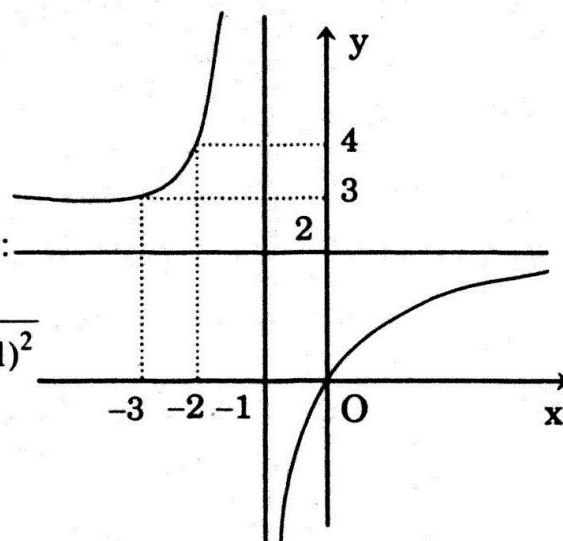
2. **Tìm tọa độ điểm M....(1 điểm)**

Vì $M \in (C)$ nên $M\left(x_0; \frac{2x_0}{x_0+1}\right)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + \frac{2x_0}{x_0+1} \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}$$

$$\Rightarrow A(-x_0^2; 0), B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$$



Từ giả thiết ta có: $\left| \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \right| \cdot |-x_0^2| = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{1}{2} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

Với $x_0 = -\frac{1}{2}$ ta có $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$

Với $x_0 = 1$ ta có $M(1; 1)$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $M\left(-\frac{1}{2}; -2\right)$ và $M(1; 1)$

Câu II.

1. Giải phương trình lượng giác (1 điểm)

Phương trình đã cho tương đương với $1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (1 điểm)

Đặt $x + \frac{1}{x} = u, y + \frac{1}{y} = v$ ($|u| \geq 2, |v| \geq 2$). Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 + v^3 - 3(u + v) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 8 - m \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u, v$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 5t + 8 = m$

Hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm $t = t_1,$

$t = t_2$ thỏa mãn: $|t_1| \geq 2, |t_2| \geq 2$ (t_1, t_2 không nhất thiết phân biệt)

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 5t + 8$ với $|t| \geq 2$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	$-\infty$	-2	2	$5/2$	$+\infty$
$f'(t)$		-		- 0 +	
$f(t)$	$+\infty$	$\nearrow 22$	$\searrow 7/4$	$\nearrow +\infty$	

Từ bảng biến thiên của hàm số suy ra hệ đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$\frac{7}{4} \leq m \leq 2 \text{ hoặc } m \geq 22.$$

Câu III.**1. Viết phương trình đường thẳng d.... (1 điểm)**

Tọa độ trọng tâm: $G(0; 2; 2)$.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (1; 4; 2)$, $\overrightarrow{OB} = (-1; 2; 4)$

Vectơ chỉ phương của d là: $\vec{n} = (12; -6; 6) = 6(2; -1; 1)$

Phương trình đường thẳng d: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$

2. Tìm tọa độ điểm M....(1 điểm)

Vì $M \in \Delta M(1-t; -2+t; 2t)$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2$$

$$= (t^2 + (6-t)^2 + (2-2t)^2) + ((-2+t)^2 + (4-t)^2 + (4-2t)^2) \\ = 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 + 28.$$

$MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = 2$. Khi đó $M(-1; 0; 4)$

Câu IV.**1. Tính tích phân (1,00 điểm)**

$$\text{Đặt } u = \ln^2 x, dv = x^3 dx \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx, v = \frac{x^4}{4}.$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{x^4}{4} \cdot \ln^2 x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{2} \int_1^e x^3 \ln x dx$$

$$\text{Đặt } u = \ln x, dv = x^3 dx \Rightarrow du = \frac{dx}{x}, v = \frac{x^4}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \int_1^e x^3 \ln x = \frac{x^4}{4} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{e^4}{4} - \frac{1}{16} x^4 \Big|_1^e = \frac{3e^4 + 1}{16}$$

2 Chứng minh bất đẳng thức (1,00 điểm)

Bất đẳng đã cho tương đương với

$$(1+4^a)^b \leq (1+4^b)^a \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \frac{\ln(1+4^b)}{b}$$

Xét hàm $f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}$ với $x > 0$. Ta có

$$f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (1+4^x) \ln(1+4^x)}{x^2 (1+4^x)} < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Do $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$ và $a \geq b > 0$ nên $f(a) \leq f(b)$ và ta có điều phải chứng minh.

Câu V.a

1. Tìm hệ số của x^5 (1,00 điểm)

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1-2x)^5$ là $(-2)^4 \cdot C_5^4$

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x^2(1+3x)^{10}$ là $3^3 \cdot C_{10}^3$

Hệ số của x^5 trong khai triển của $x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$ là :

$$(-2)^4 C_5^4 + 3^3 \cdot C_{10}^3 = 3320$$

2. Tìm m để có duy nhất điểm P sao cho tam giác PAD đều

(C) có tâm $I(1; -2)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có ΔPAB đều nên $IP = 2IA = 2R = 6 \Leftrightarrow P$ thuộc đường tròn (C') tâm I , bán kính $R' = 6$.

Trên d có duy nhất một điểm P thỏa mãn yêu cầu bài toán khi và chỉ khi d tiếp xúc với (C') tại $P \Leftrightarrow d(I; d) = 6 \Leftrightarrow m = 19, m = -41$

V.b.

1. Giải phương trình logarit (1,00 điểm)

Điều kiện : $4 \cdot 2^x - 3 > 0$. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = \log_2(4 \cdot 2^x - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot (2^x)^2 - 13 \cdot 2^x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = -\frac{2}{5} \\ 2^x = 3 \end{cases}$$

Do $2^x > 0$ nên $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$ (thỏa mãn điều kiện)

2. Chứng minh ΔSCD vuông và tính khoảng cách từ H đến (SCD)

Gọi I là trung điểm của AD . Ta có : $IA = ID = IC = a \Rightarrow CD \perp AC$.

Mặt khác, $CD \perp SA$. Suy ra $CD \perp SC$ nên ΔSCD vuông tại C

Trong tam giác vuông SAB ta có :

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AB^2} = \frac{2a^2}{2a^2 + a^2} = \frac{2}{3}$$

Gọi d_1 và d_2 lần lượt là khoảng cách từ B và H đến mp(SCD) thì

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3}d_1$$

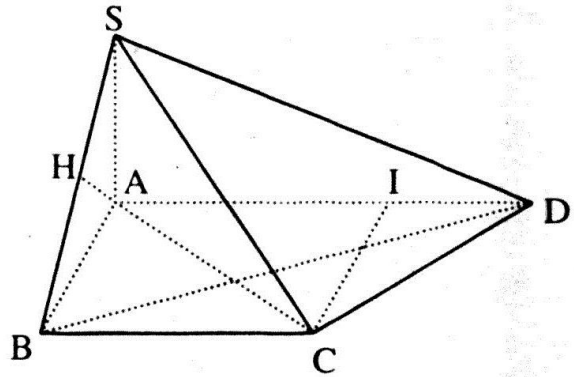
Ta có : $d_1 = \frac{3V_{BSCD}}{S_{SCD}} = \frac{SA \cdot S_{BCD}}{S_{SCD}}$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}a^2$$

$$S_{SCD} = \frac{1}{2}SC \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AB^2 + BC^2} \cdot \sqrt{IC^2 + ID^2} = a^2\sqrt{2}$$

Suy ra $d_1 = \frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến mp (SCD) là : $d_2 = \frac{2}{3}d_1 = \frac{a}{3}$



ĐỀ SỐ 49

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, KHỐI A, NĂM 2007

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số: $y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên đồ thị hàm số đến các đường tiệm cận của nó là hằng số.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cos 2x$.
2. Tìm m để bất phương trình: $m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0$ có nghiệm $x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$.

Câu III. (2 điểm).

Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(-1; 3; -2), B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng (P): $2x - y + z + 1 = 0$.

1. Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt phẳng (P).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân $I = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1 + \sqrt{2x+1}} dx$.

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu Va. (Cho chương trình THPT không phân ban) (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C') tâm $I(2; 2)$ cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB = \sqrt{2}$. Viết phương trình đường thẳng AB.
2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn lớn hơn 2007 mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau?

Câu Vb. (Cho chương trình THPT phân ban) (2 điểm)

1. Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0$.

2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có $AB = a$, $AC = 2a$, $AA_1 = 2a\sqrt{5}$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC_1 . Chứng minh MB vuông góc với MA_1 và tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (A_1BM) .

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x - 2} = -x + 2 + \frac{1}{x - 2}$ (C)

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

• $y' = -1 - \frac{1}{(x - 2)^2} < 0, \forall x \in D$

• Giới hạn và tiệm cận:

$\lim_{x \rightarrow 2} y = \pm\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x - 2} = 0 \Rightarrow y = -x + 2$ là tiệm cận xiên

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'			
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

• Điểm đặc biệt:

$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}; y = 0 \Rightarrow x = 1; x = 3$

• Đồ thị: hình bên

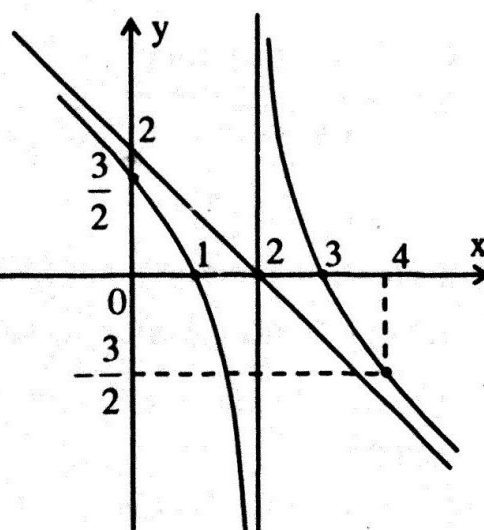
2. **Chứng minh**

Gọi $M \left(x_0; -x_0 + 2 + \frac{1}{x_0 - 2} \right) \in (C) (x_0 \neq 2)$

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Delta_1: x - 2 = 0$ và tiệm cận xiên $\Delta_2: x + y - 2 = 0$

Khoảng cách từ M đến Δ_1 và Δ_2 lần lượt là

$d_1: |x_0 - 2|$



$$d_2 = \frac{\left| x_0 + \left(-x_0 + 2 + \frac{1}{x_0 - 2} \right) - 2 \right|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}|x_0 - 2|}$$

$$\text{có: } d_1 \cdot d_2 = |x_0 - 2| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}|x_0 - 2|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

u II.

Giải phương trình

$$t: \sin 2x + \sin x - \frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{\sin 2x} = 2 \cot g 2x \quad (1)$$

$$\text{điều kiện: } \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin 2x} - \sin 2x \right) + \left(\frac{1}{2 \sin x} - \sin x \right) + 2 \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 2x) + (1 - 2 \sin^2 x) \cos x + 2 \cos 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x + \cos 2x \cos x + 2 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x (\cos 2x + \cos x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (2 \cos^2 x + \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ 2 \cos^2 x + \cos x + 1 = 0: \text{ vô nghiệm} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Tìm m để bất phương trình có nghiệm

$$t: m(\sqrt{x^2 - 2x + 2} + 1) + x(2 - x) \leq 0, \text{ đặt } t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

$$t \text{ hàm số: } g(x) = t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}, \quad x \in [0; 1 + \sqrt{3}]$$

$$g'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

ng biến thiên:

x	0	1	$1 + \sqrt{3}$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\sqrt{2}$	1	2

$$\forall x \in [0; 1 + \sqrt{3}] \Rightarrow t \in [1; 2]$$

$$\text{có: } t^2 = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow 2x - x^2 = 2 - t^2$$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow m(t+1) + 2 - t^2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 - 2}{t+1}, t \in [1; 2]$

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t+1}, t \in [1; 2]$

$$f'(t) = \frac{t^2 + 2t + 2}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in [1; 2]$$

Bảng biến thiên:

t	1	2
f'(t)	+	
f(t)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \leq \frac{2}{3}$.

Câu III.

1. Viết phương trình mặt phẳng

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; -16)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; 1)$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P) thì (α) nhận $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n}$ là cặp vectơ chỉ phương suy ra (α) có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n'} = [\overrightarrow{AB}, \vec{n}] = \left(\begin{vmatrix} 4 & -16 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -16 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (-12; -30; -6)$$

hay $\vec{n_0} = (2; 5; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n_0}$ là:

$$2(x+1) + 5(y-3) + 1(z+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 5y + z - 11 = 0.$$

2. Tìm tọa độ điểm M

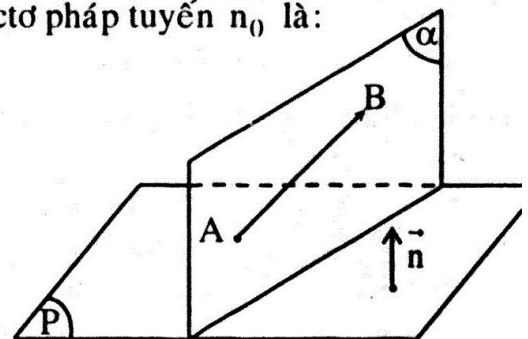
Đặt $f(x, y, z) = 2x - y + z + 1$

Ta có: $\begin{cases} f(A) = -6 \\ f(B) = -30 \end{cases} \Rightarrow f(A) \cdot f(B) > 0$

$\Rightarrow$ Hai điểm A và B nằm cùng phía đối với mặt phẳng (P).

Gọi A' là đối xứng của điểm A qua (P)

Giao điểm của đường thẳng A'B với mp(P) là điểm M cần tìm.



vậy: Với mọi điểm $M \in (P)$, ta có:

$MA + MB = MA' + MB \geq A'B$ (không đổi).

$\min(MA + MB) = A'B$, đạt được khi ba điểm A', M, B thẳng hàng

$l = (A'B) \cap (P)$.

Phương trình đường thẳng (Δ) qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{n}$ là

$$x = -1 + 2t$$

$$y = 3 - t$$

$$z = -2 + t$$

H là hình chiếu vuông góc của A trên (P)

$l = (\Delta) \cap (P)$.

Giá trị số t ứng với tọa độ của H là nghiệm của

phương trình:

$$(-1 + 2t) - (3 - t) - 2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(1; 2; -1)$$

A' đối xứng với A qua (P) nên H là trung điểm của đoạn AA' , ta có:

$$x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 + 1 = 3$$

$$y_{A'} = 2y_H - y_A = 4 - 3 = 1 \Rightarrow A'(3; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{A'B} = (-6; 6; -18).$$

$$z_{A'} = 2z_H - z_A = -2 + 2 = 0$$

Phương trình đường thẳng $(A'B)$ qua A' và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{A'B} = (1; -1; 3)$,

phương trình là:

$$x = 3 + t'$$

$$y = 1 - t'$$

$$z = 3t'$$

Giá trị số t' ứng với giao điểm $M = (A'B) \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$(3 + t') - (1 - t') + 3t' + 1 = 0 \Leftrightarrow t' = -1 \Rightarrow M(2; 2; -3).$$

Điểm cần tìm là $M(2; 2; -3)$.

IV.

Viết tích phân: $I = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx$

$$t = \sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2 = 2x+1 \Rightarrow 2tdt = 2dx \Rightarrow dx = tdt$$

thay:

x	0	4
t	$\frac{1}{3}$	3

$$I = \int_1^3 \frac{t^2}{1+t} dt = \int_1^3 \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) dt = \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| \right) \Big|_1^3 = 2 + \ln 2.$$

2. Giải hệ phương trình

Ta có:

$$\begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3^{y-1} + 1 \\ y + \sqrt{y^2 - 2y + 2} = 3^{x-1} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1) + \sqrt{(x-1)^2 + 1} = 3^{y-1} \\ (y-1) + \sqrt{(y-1)^2 + 1} = 3^{x-1} \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = y - 1 \end{cases}$

Ta được:

$$\begin{cases} u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2 + 1} = 3^u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 3^v (u - \sqrt{u^2 + 1}) \\ -1 = 3^u (v - \sqrt{v^2 + 1}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^v (u - \sqrt{u^2 + 1}) = 3^u (v - \sqrt{v^2 + 1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{u - \sqrt{u^2 + 1}}{3^u} = \frac{v - \sqrt{v^2 + 1}}{3^v} \Leftrightarrow f(u) = f(v)$$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t - \sqrt{t^2 + 1}}{3^t}, t \in \mathbb{R}$

$$f'(t) = \frac{(\sqrt{t^2 + 1} - t)(1 + \sqrt{t^2 + 1} \ln 3)}{3^t} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến $\forall t \in \mathbb{R}$

Do đó: $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Khi đó, ta có: $u + \sqrt{u^2 + 1} = 3^u \Leftrightarrow 3^u (\sqrt{u^2 + 1} - u) = 1 \quad (*)$

Xét hàm số: $g(u) = 3^u (\sqrt{u^2 + 1} - u), u \in \mathbb{R}$

$$g'(u) = 3^u (\sqrt{u^2 + 1} - u) \left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{u^2 + 1}} \right) > 0, \forall u \in \mathbb{R}$$

Mặt khác: $g(0) = 1 \Rightarrow u = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$

$$\Rightarrow u = v = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x = y = 1$.

Va.

có tâm $O(0; 0)$ và bán kính $R = 1$

H là hình chiếu vuông góc của O trên AB thì H là trung điểm của đoạn AB

$$\text{S: } HA = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{[A vuông tại H, ta có: } OH = \sqrt{OA^2 - HA^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Phương trình đường thẳng AB nhận $\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{OI} = (1; 1)$ làm vectơ pháp tuyến có

$$\text{S: } x + y + C = 0.$$

$$\text{S: } d(O, AB) = OH$$

$$\frac{|C|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow C = \pm 1$$

có hai đường thẳng (AB) cần tìm là :

$$x + y + 1 = 0 \text{ hay } x + y - 1 = 0.$$

Tìm số tự nhiên chẵn

$$X = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$$

Chữ số tìm có dạng $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ($a_1 \neq 0$)

Trường hợp 1. $a_4 = 0$

Chọn $a_1 \in X \setminus \{0; 1\}$: có 8 cách.

Chọn hai chữ số thuộc $X \setminus \{0; a_1\}$ xếp vào hai vị trí a_2, a_3 : có A_8^2 cách.

Trường hợp này có: $8 \cdot A_8^2 = 448$ (số).

Trường hợp 2. $a_4 \neq 0$

Chọn $a_4 \in \{2; 4; 6; 8\}$: có 4 cách.

Chọn $a_1 \in X \setminus \{0; 1; a_4\}$: có 7 cách.

Chọn hai chữ số thuộc $X \setminus \{a_1; a_4\}$ xếp vào hai vị trí a_2, a_3 : có A_8^2 cách.

Trường hợp này có: $4 \cdot 7 \cdot A_8^2 = 1568$ (số).

Có tất cả: $448 + 1568 = 2016$ (số).

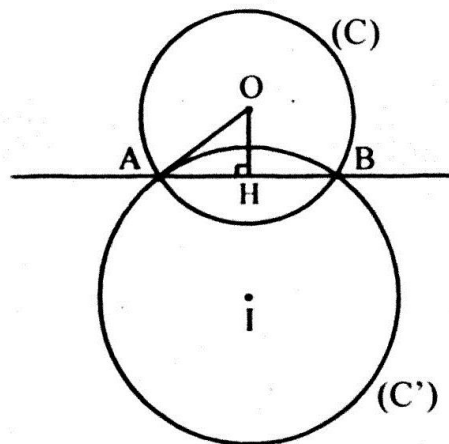
Vb.

Giải bất phương trình

$$(\log_x 8 + \log_4 x^2) \log_2 \sqrt{2x} \geq 0 \quad (1)$$

Điều kiện: $0 < x \neq 1$

$$\Rightarrow (3 \cdot \log_x 2 + \log_2 x) \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 2x \geq 0$$



$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{\log_2 x} + \log_2 x \right) (1 + \log_2 x) \geq 0$$

Đặt $t = \log_2 x$ ($t \neq 0$), ta có:

$$\left(\frac{3}{t} + t \right) (1 + t) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3+t^2}{t} \right) (1+t) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+1}{t} \geq 0 \Leftrightarrow t \leq -1 \vee t > 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \leq -1 \vee \log_2 x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ hay } x > 1.$$

So với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình $0 < x \leq \frac{1}{2}$ hay $x > 1$.

2. Chứng minh $MB \perp MA_1$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC ta có:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ \\ &= a^2 + 4a^2 - 2a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) = 7a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow BC = a\sqrt{7}$$

Ta có:

$$BC = \sqrt{BC^2 + MC^2} = \sqrt{7a^2 + (a\sqrt{5})^2} = 2a\sqrt{3}$$

$$A_1B = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{a^2 + 20a^2} = a\sqrt{21}$$

$$A_1M = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1M^2} = \sqrt{4a^2 + (a\sqrt{5})^2} = 3a$$

Nhận xét: $BM^2 + A_1M^2 = 12a^2 + 9a^2 = 21a^2 = A_1B^2 \Rightarrow \Delta A_1MB$ vuông tại M

Vậy $MB \perp MA_1$ (đpcm).

• Tính khoảng cách từ A đến (A_1BM)

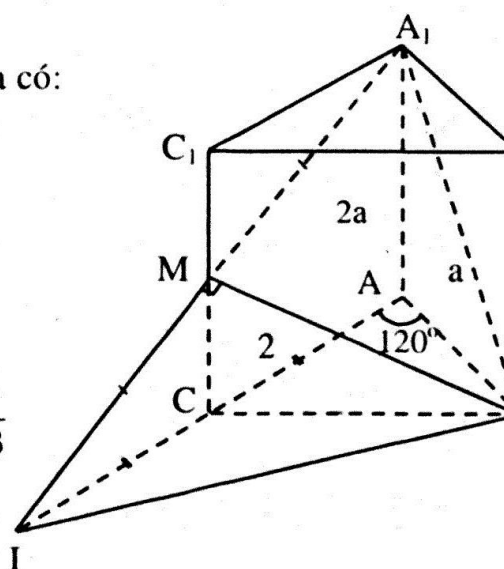
Gọi $I = AC \cap A_1M$, ta có: $CM \parallel AA_1$ và $CM = \frac{1}{2}AA_1$ nên CM là đường trung bình của tam giác IAA_1

Suy ra: C, M lần lượt là trung điểm của IA và IA_1

Do đó: $IA = AC = 4a$ và $IA_1 = 2A_1M = 6a$

Diện tích tam giác ABI và A_1BI lần lượt là:

$$S_{ABI} = \frac{1}{2} AB \cdot AI \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} a \cdot 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a^2 \sqrt{3}$$



$$V_{A_1BI} = \frac{1}{2} A_1I \cdot BM = \frac{1}{2} \cdot 6a \cdot 2a\sqrt{3} = 6a^2\sqrt{3}.$$

tích tứ diện A_1ABI là:

$$V_{A_1ABI} = \frac{1}{3} S_{ABI} \cdot A_1A = \frac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{3} \cdot 2a\sqrt{5} = \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}.$$

khác:

$$V_{A_1ABI} = \frac{1}{3} S_{A_1BI} \cdot AH \quad (AH: \text{là chiều cao})$$

$$AH = \frac{3V_{A_1ABI}}{S_{A_1BI}} = \frac{3 \cdot \frac{2a^3\sqrt{15}}{3}}{6a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}$$

khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A_1BM) là: $d = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$

h khác

$CK \perp AB$ tại K thì $CK \perp (A_1AB)$

$$\text{ó: } \widehat{CAK} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow CK = AC \cdot \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$$

tích tam giác A_1AB và MA_1B lần lượt là:

$$S_{A_1AB} = \frac{1}{2} A_1A \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{5} \cdot a = a^2\sqrt{5}.$$

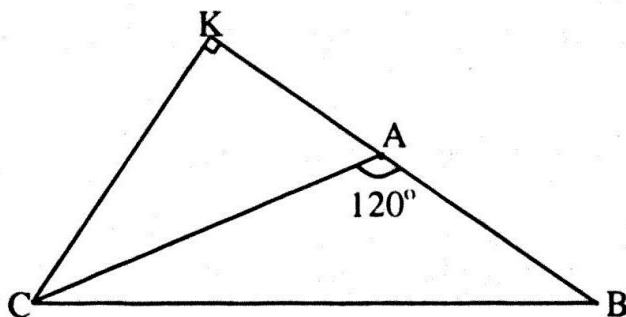
$$S_{MA_1B} = \frac{1}{2} MA_1 \cdot MB = 3a^2\sqrt{3}.$$

tích tứ diện MA_1AB là:

$$V_{MA_1AB} = \frac{1}{3} S_{A_1AB} \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{5} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}.$$

khác:

$$V_{MA_1AB} = \frac{1}{3} S_{MA_1B} \cdot d \Rightarrow d = \frac{3V_{MA_1AB}}{S_{MA_1B}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{15}}{3}}{3a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$



ĐỀ SỐ 50

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, KHỐI A, NĂM 2007

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số : $y = x + m + \frac{m}{x-2}$ (C_m).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị (C_m) có cực trị tại các điểm A, B sao cho đường thẳng AB qua gốc tọa độ.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1. \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm).

Trong không gian Oxyz, cho các điểm A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(2; 4; 6) và

đường thẳng d:
$$\begin{cases} 6x - 3y + 2z = 0 \\ 6x + 3y + 2z - 24 = 0. \end{cases}$$

1. Chứng minh các đường thẳng AB và OC chéo nhau.
2. Viết phương trình đường thẳng Δ song song với d và cắt các đường thẳng A OC.

Câu IV. (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $4y = x^2$ $y = x$. Tính thể tích một vật thể tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox tròn n vòng.

2. Cho x, y, z là các số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} + \sqrt[3]{4(y^3 + z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3 + x^3)} + 2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right).$$

Câu Va. (Cho chương trình THPT không phân ban) (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có trọng tâm G(-2;0). Biết phương trình các cạnh AB, AC theo thứ tự là $4x + y + 14 = 0$, $2x + 5y - 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.
2. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD lần lượt cho 1, 2, 3 n điểm phân biệt khác A, B, C, D. Tìm n biết rằng số tam giác có ba đỉnh từ n + 6 điểm đã cho là 439.

Câu Vb. (Cho chương trình THPT phân ban) (2 điểm)

1. Giải phương trình : $\log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2}$.
2. Cho hình chóp S.ABC có góc $(\widehat{SBC, ABC}) = 60^\circ$, ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a. Tính theo a khoảng cách từ đỉnh B đến mặt phẳng (SAC).

GIẢI

Câu I.

1. Khảo sát hàm số với $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có $y = x + 1 + \frac{1}{x-2}$.

- Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

- $y' = 1 - \frac{1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x-2)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = 5 \end{cases}$$

- Giới hạn và tiệm cận :

$\lim_{x \rightarrow \infty} = \pm\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = x + 1 + \frac{1}{x-2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x + 1 \text{ là tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y						
		1				
		CD				
	$-\infty$		$-\infty$			
				5		
				CT		

- Điểm đặc biệt

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}; y = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

• Đồ thị : hình bên

2. Tìm m

$$y = x + m + \frac{m}{x-2}$$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$y' = 1 - \frac{m}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - m}{(x-2)^2}$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$

hay $(x-2)^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

Khi đó: $y' = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow y = m + 2 - 2\sqrt{m} \\ x = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow y = m + 2 + 2\sqrt{m} \end{cases}$$

Giả sử $A(2 - \sqrt{m}; m + 2 - 2\sqrt{m})$, $B(2 + \sqrt{m}; m + 2 + 2\sqrt{m})$

$$\Rightarrow \overline{AB} = (2\sqrt{m}; 4\sqrt{m}) = 2\sqrt{m}(1; 2).$$

Phương trình đường thẳng qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \frac{1}{2\sqrt{m}} \cdot \overline{AB} = (1; 2)$ là:

$$\frac{x - 2 + \sqrt{m}}{1} = \frac{y - m - 2 + 2\sqrt{m}}{2} \Leftrightarrow y = 2x + m - 2.$$

Ta có: $O \in (AB) \Rightarrow m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (thỏa $m > 0$).

Vậy giá trị cần tìm là $m = 2$.

Câu II.

1. Giải phương trình

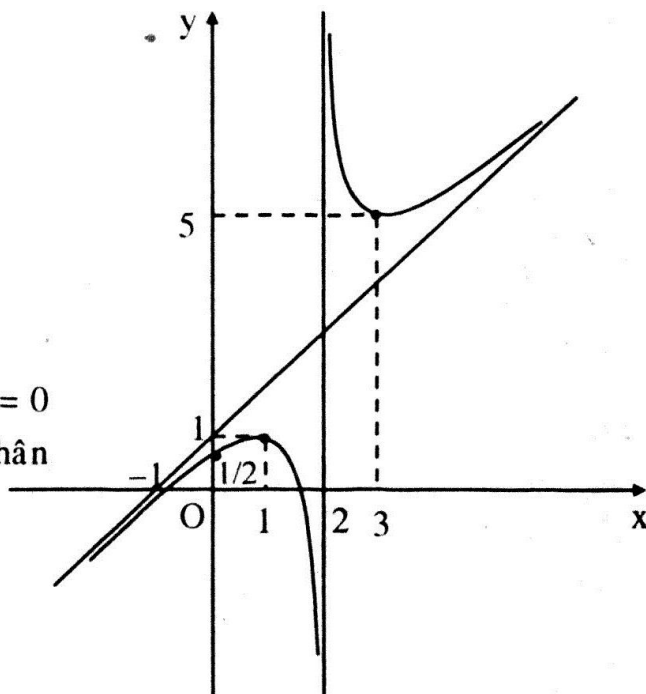
Ta có: $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 1 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 2 = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + 1 = 3\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{Đặt } t = x + \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = t - \frac{\pi}{3} \\ 2x + \frac{\pi}{6} = 2t - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\text{a được: } \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) + 1 = 3\sin t \Leftrightarrow -\cos 2t + 1 = 3\sin t \Leftrightarrow 2\sin^2 t - 3\sin t = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin t = 0 \\ \sin t = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Giải hệ phương trình

$$\text{a có: } \begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 1 = x^2y(x - y) & (1) \\ x^2 - 1 = xy(x^2 + 1) & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Xét $x = \pm 1$:

$$+ \text{ Với } x = 1: (I) \Leftrightarrow \begin{cases} y(1 - y) = 0 \\ 2y \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

$\Rightarrow (x = 1; y = 0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

$$+ \text{ Với } x = -1: (I) \Leftrightarrow \begin{cases} y(-1 - y) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$$

$\Rightarrow (x = -1; y = 0)$ là nghiệm của hệ phương trình.

Xét $x \neq \pm 1$:

Ấy (1) chia cho (2) vế theo vế, ta được

$$x^2 + 1 = x \left(\frac{x - y}{x^2 + 1} \right) \text{ (do } xy = 0 \text{ không thỏa hệ)} \Rightarrow xy = -(x^4 + x^2 + 1) \quad (3)$$

Thế (3) vào (2), ta có: $x^2 - 1 = -(x^4 + x^2 + 1)(x^2 + 1)$

$$\Rightarrow x^2(x^4 + 2x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 3 = 0: \text{ vô nghiệm}$$

Những nghiệm của hệ phương trình là $(-1; 0), (1; 0)$

Cách khác

Xét $x = 0$: Hệ vô nghiệm

Xét $x \neq 0$: Đặt $y = tx$

$$I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4(t^2 - t + 1) = 1 \\ x^2(tx^2 + t - 1) = -1 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \frac{tx^2 + t - 1}{x^2(t^2 - t + 1)} = -1 \Rightarrow x^2 = \frac{1 - t}{t^2 + 1}$$

Thi đó:

$$*) \Leftrightarrow \left(\frac{1 - t}{t^2 + 1} \right)^2 (t^2 - t + 1) = 1 \Leftrightarrow t(3t^2 - 2t + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 3t^2 - 2t + 3 = 0: \text{ vô nghiệm} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 0: (*) \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 0 \\ x = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(-1; 0), (1; 0)$.

Câu III.

1. Chứng minh AB và OC chéo nhau

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; 4; 0)$, $\overrightarrow{OC} = (2; 4; 6)$, $\overrightarrow{AC} = (0; 4; 6)$ và

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}] = \left(\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \right) = (24; 12; -16)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}] \cdot \overrightarrow{AC} = 24 \cdot 0 + 12 \cdot 4 + (-16) \cdot 6 = -48 \neq 0.$$

Vậy hai đường thẳng AB và OC chéo nhau.

2. Viết phương trình đường thẳng Δ

(d) có vectơ chỉ phương là :

$$\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-12; 0; 36)$$

hay $\vec{c}_0 = (-1; 0; 3)$.

Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và song song với (d) thì (α) qua A và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$, $\vec{c}_0$

$\Rightarrow (\alpha)$ có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}_1 = [\vec{a}, \vec{c}_0] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 3; 2).$$

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng

$$6(x - 2) + 3(y - 0) + 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 12 = 0.$$

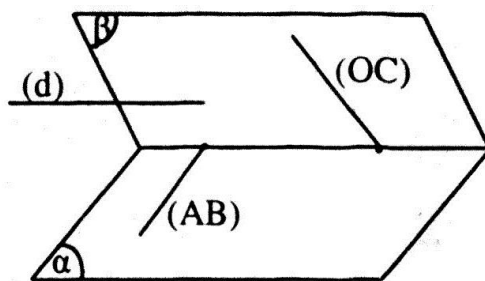
Gọi (β) là mặt phẳng chứa OC và song song với (d) thì (β) qua O và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = (1; 2; 3)$, $\vec{c}_0$

$\Rightarrow (\beta)$ có vectơ pháp tuyến là :

$$\vec{n}_2 = [\vec{b}, \vec{c}_0] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; -6; 2) = 2(3; -3; 1)$$

Phương trình mặt phẳng (β) có dạng: $3x - 3y + z = 0$.

$\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$ nên có phương trình:
$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \\ 3x - 3y + z = 0 \end{cases}$$



Ta có: $\begin{cases} \vec{c_0} \neq k\vec{a} \\ \vec{c_0} \neq l\vec{b} \end{cases} \Rightarrow \Delta \text{ cắt } AB \text{ và } OC.$

Câu IV.

1. Tính thể tích vật thể tròn xoay

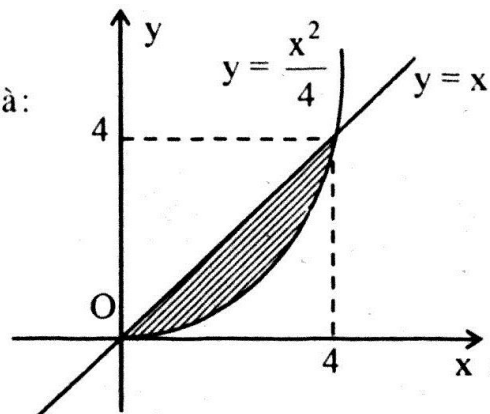
Đặt (P) : $4y = x^2$; (d): $y = x$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0; y = 4$$

Dựa vào đồ thị ta thấy thể tích cần tìm là

$$V = \pi \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^4}{16} \right) dx = \pi \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{80} \right) \Big|_0^4 = \frac{128}{15} \pi.$$



2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P

Ta sẽ chứng minh: $4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3$

Thật vậy :

$$4(x^3 + y^3) \geq (x + y)^3 \Leftrightarrow 4(x + y)(x^2 + y^2 - xy) \geq (x + y)^3$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 + y^2 - xy) \geq (x + y)^2 \quad (\text{do } x > 0, y > 0)$$

$$\Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0: \text{luôn luôn đúng. Dấu "=" xảy ra khi } x = y$$

$$\text{Do đó: } \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} \geq x + y$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt[3]{4(y^3 + z^3)} \geq y + z$$

$$\sqrt[3]{4(z^3 + x^3)} \geq z + x$$

$$\text{Suy ra: } \sqrt[3]{4(x^3 + y^3)} + \sqrt[3]{4(y^3 + z^3)} + \sqrt[3]{4(z^3 + x^3)} \geq 2(x + y + z)$$

$$\text{Khi đó: } P \geq 2(x + y + z) + 2\left(\frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$P \geq 2\left(x + y + z + \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2}\right) \geq 2.6.6\sqrt{x.y.z.\frac{x}{y^2}.\frac{y}{z^2}.\frac{z}{x^2}} = 12$$

$$\text{Vậy min } P = 12, \text{ đạt được khi } \begin{cases} x = y = z = \frac{x}{y^2} = \frac{y}{z^2} = \frac{z}{x^2} \Leftrightarrow x = y = z = 1. \\ x > 1, y > 0, z > 0 \end{cases}$$

Câu V. a

1. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C

$$\text{Tọa độ của A thỏa hệ } \begin{cases} 4x + y + 14 = 0 \\ 2x + 5y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 2)$$

Ta có:

$$B \in (AB) \Rightarrow B(t_1; -4t_1 - 14)$$

$$C \in (AC) \Rightarrow C(1 - 5t_2; 2t_2)$$

G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + t_1 + 1 - 5t_2 = -6 \\ 2 - 4t_1 - 14 + 2t_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 - 5t_2 = -3 \\ 4t_1 - 2t_2 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3; -2), C(1; 0).$$

Vậy tọa độ các đỉnh của tam giác ABC là A(-4; 2), B(-3; -2), C(1; 0).

2. Tìm m

Nhận xét. Qua 3 điểm trên cạnh CD cũng như 3 trong n điểm trên cạnh AD không tạo thành một tam giác.

Do đó, số tam giác được tạo nên từ 3 điểm không thẳng hàng trong số $(n + 6)$ điểm đã cho là

$$C_{n+6}^3 - (C_3^3 + C_n^3) \text{ (tam giác)}$$

Theo đề bài ta có: $C_{n+6}^3 - (C_3^3 + C_n^3) = 439 \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+6)!}{3!(n+3)!} - \left(1 + \frac{n!}{3!(n-3)!}\right) = 439$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}(n+4)(n+5)(n+6) - \frac{1}{6}(n-2)(n-1)n = 440$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 140 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 10 \text{ (thỏa } n \geq 3) \\ n = -14 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $n = 10$.

Câu V. b

1. Giải phương trình

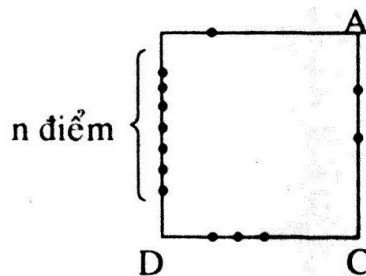
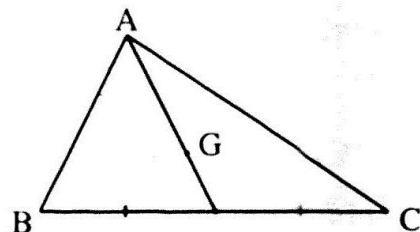
$$\text{Xét: } \log_4(x-1) + \frac{1}{\log_{2x+1} 4} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x+2} \quad (1)$$

Điều kiện: $x > 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2(x-1) + \frac{1}{2} \log_2(2x+1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-1) + \log_2(2x+1) = 1 + \log_2(x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2[(x-1)(2x+1)] = \log_2[2(x+2)]$$



$$\Leftrightarrow (x-1)(2x+1) = 2(x+2) \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Do với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{5}{2}$.

1. Tính khoảng cách từ B đến (SAC)

Gọi M là trung điểm của BC. Do ABC và SBC là các tam giác đều cạnh a nên ta

$$\text{có: } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM)$$

$\Rightarrow \widehat{SMA} = 60^\circ$ là góc hợp bởi hai mặt phẳng (ABC) và (SBC).

$$\Delta SAM \text{ có } AM = SM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ và } \widehat{SMA} = 60^\circ \text{ nên là tam giác đều} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp (SAM) \\ BC \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (SAM) \perp (ABC) \text{ theo giao tuyến AM.}$$

Gọi H là trung điểm của AM thì $SH \perp AM \Rightarrow SH \perp (ABC)$

$$\Delta SHM \text{ vuông tại H ta có: } SH = SM \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}.$$

Thể tích hình chóp S.ABC là:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3a}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{16}, \text{ với } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Gọi I là trung điểm của SA thì $CI \perp SA$ (do ΔSAC cân tại C)

$$\text{Ta có: } CI = \sqrt{AC^2 - AI^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

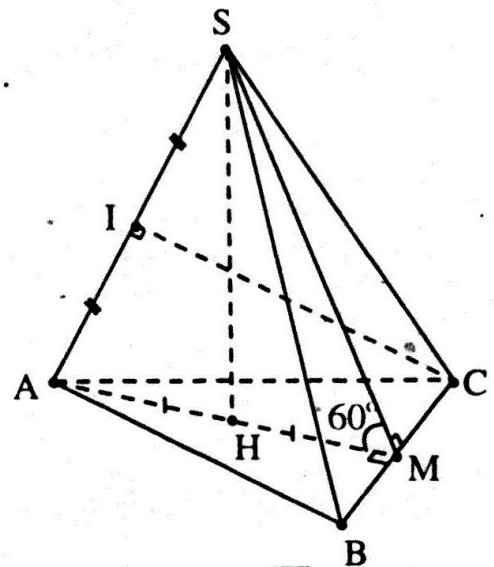
Diện tích tam giác SAC là:

$$S_{SAC} = \frac{1}{2} SA \cdot CI = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{13}}{4} = \frac{a^2\sqrt{39}}{16}.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{SAC} \cdot d(B, (SAC))$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = \frac{3V_{SABC}}{S_{SAC}} = \frac{3 \cdot \frac{a^3\sqrt{3}}{16}}{\frac{a^2\sqrt{39}}{16}} = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$$

Vậy khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) là: $d(B, (SAC)) = \frac{3a\sqrt{13}}{13}.$



ĐỀ SỐ 51

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, KHỐI B, NĂM 2007

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C), biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(-1; -13)$.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$.
2. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm.

Câu III. (2 điểm).

Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(-3; 5; -5)$, $B(5; -3; 7)$ và mặt phẳng (P): $x + y + z = 0$.

1. Tìm giao điểm I của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).
2. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $(MA^2 + MB^2)$ nhỏ nhất.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0$ và $y = \frac{x(1-x)}{x^2 + 1}$.
2. Chứng minh rằng hệ phương trình
$$\begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases}$$
 có đúng hai nghiệm thỏa mãn điều kiện $x > 0, y > 0$.

Câu Va. (Cho chương trình THPT không phân ban) (2 điểm)

1. Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ phương trình:
$$\begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 \\ A_y^3 + C_x^2 = 66. \end{cases}$$
2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ và đường thẳng d: $x + y - 1 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD ngoại tiếp đường tròn (C) biết A thuộc d.

Câu Vb. (Cho chương trình THPT phân ban) (2 điểm)

1. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}}(2x-1) = 2$.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông tâm O, SA vuông góc với đáy hình chóp. Cho $AB = a$, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SD. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (AHK) và tính thể tích hình chóp OAHK.

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ (C)

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$

- $y' = -6x^2 + 12x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -5 \\ x = 2 \Rightarrow y = 3 \end{cases}$$

- Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-5 CT	3 CD	$-\infty$	

- Tính lồi, lõm và điểm uốn

$$y'' = -12x + 12$$

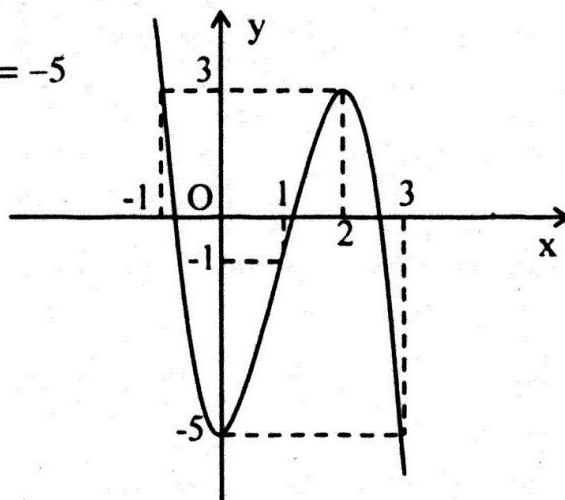
$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = -1$$

X	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	+	0	-
Đồ thị	lõm	Đ.U I(1; -1)	lồi

- Điểm đặc biệt:

$$x = 0 \Rightarrow y = -5; x = 3 \Rightarrow y = -5$$

- Đồ thị:



2. Viết phương trình tiếp tuyến

Phương trình đường thẳng Δ qua A với hệ số góc k có dạng : $y = k(x + 1) - 13$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} -2x^3 + 6x^2 - 5 = k(x + 1) - 13 & (1) \\ -6x^2 + 12x = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta có:

$$\begin{aligned} -2x^3 + 6x^2 - 5 &= (-6x^2 + 12x)(x + 1) - 13 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 &= 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(2)} \\ x = 1 \Rightarrow k = 6 \\ \text{(2)} \\ x = -2 \Rightarrow k = -48 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $\Delta_1: y = 6x - 7$; $\Delta_2: y = -48x - 61$.

Câu II.

1. Giải phương trình

$$\text{Ta có: } \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{3x}{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{3x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left[2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\right] \cos \frac{3x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{3x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Tìm m để phương trình có nghiệm

$$\text{Xét } \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x} = m \quad (1)$$

Điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{Xét hàm số: } f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1} - \sqrt{x}, \quad x \geq 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right]$$

Vận xét. $\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} < \frac{x}{\sqrt[4]{x^6}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x > 0$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số nghịch biến $\forall x \geq 0$

Mặt khác: $0 < \sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = \sqrt[4]{(x+1)^2 - 2x} - \sqrt{x} < \sqrt[4]{(x+1)^2} - \sqrt{x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

Do đó: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x}) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$

Bảng biến thiên

X	0	$+\infty$
$f'(x)$		
$f(x)$	1	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m \leq 1$

Cách khác

Đặt $x = \operatorname{tg} t, 0 \leq t < \frac{\pi}{2}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt[4]{\operatorname{tg}^2 t + 1} - \sqrt{\operatorname{tg} t} = m \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\cos t}} - \sqrt{\operatorname{tg} t} = m \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}} = m$

Xét hàm số $f(t) = \frac{1 - \sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}}, t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

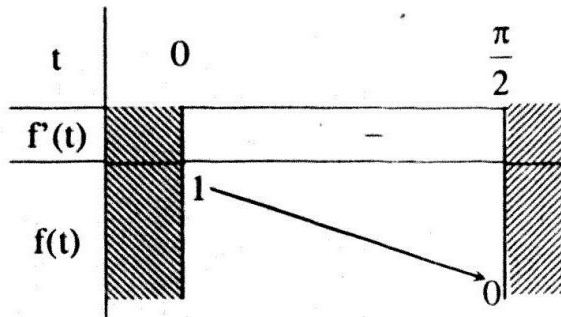
$$f'(t) = \frac{\sin t \cdot \sqrt{\sin t} - 1}{\sqrt{2 \sin 2t} \cdot \cos t} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm số nghịch biến $\forall t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(t) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sqrt{\sin t}}{\sqrt{\cos t}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin t) \sqrt{\cos t}}{\cos t (1 + \sqrt{\sin t})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{\cos t}}{\left(\cos^2 \frac{t}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}\right) (1 + \sqrt{\sin t})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\cos \frac{t}{2} - \sin \frac{t}{2}\right) \cdot \sqrt{\cos t}}{\left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}\right) (1 + \sqrt{\sin t})} = 0$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 0 < m \leq 1$.

Câu III.

1. Tìm giao điểm I của AB và (P)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (8; -8; 12)$

Phương trình đường thẳng AB qua điểm A và có vectơ chỉ phương

$$\vec{a} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} = (2; -2; 3) \text{ là:}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 - 2t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $I = (AB) \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$-3 + 2t + 5 - 2t - 5 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(-1; 3; -2).$$

2. Tìm tọa độ điểm M

Gọi H là trung điểm của đoạn AB thì $H(1; 1; 1)$

MH là trung tuyến của tam giác MAB nên ta có: $MA^2 + MB^2 = 2MH^2 + \frac{AB^2}{2}$

Suy ra $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của H trên (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua H và vuông góc với (P) thì Δ nhận $\vec{n}_P = (1; 1; 1)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của Δ là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Tham số t ứng với giao điểm $M = \Delta \cap (P)$ là nghiệm của phương trình

$$1 + t + 1 + t + 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow M(0; 0; 0) \text{ và } \min(MA^2 + MB^2) = OA^2 + OB^2 = 142.$$

Cách khác

$$\text{Đặt } M(x; y; z) \in (P) \Rightarrow x + y + z = 0 \quad (1)$$

Ta có:

$$\overline{MA} = (-3-x; 5-y; -5-z) \Rightarrow MA^2 = (3+x)^2 + (5-y)^2 + (5+z)^2$$

$$\overline{MB} = (5-x; -3-y; 7-z) \Rightarrow MB^2 = (5-x)^2 + (3+y)^2 + (7-z)^2$$

$$MA^2 + MB^2 = 2[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2] + 136$$

$$\text{Mặt khác: } (1) \Leftrightarrow -3 = (x-1) + (y-1) + (z-1)$$

$$\Rightarrow 3 = |1 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-1)| \leq \sqrt{3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2]}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \geq 3 \Rightarrow MA^2 + MB^2 \geq 2 \cdot 3 + 136 = 142$$

$$\Rightarrow \min(MA^2 + MB^2) = 142, \text{ đạt được khi}$$

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-1=y-1=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=0.$$

Vậy $M(0; 0; 0)$.

Câu IV.

1. Tính diện tích hình phẳng

Hoành độ giao điểm của các đường $y=0$ và $y=\frac{x(1-x)}{x^2+1}$ là nghiệm của

$$\text{phương trình: } \frac{x(1-x)}{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\text{Nhận xét. } y = \frac{x(1-x)}{x^2+1} \geq 0, \forall x \in [0; 1]$$

Do đó diện tích hình phẳng cần tìm là :

$$S = \int_0^1 \frac{x(1-x)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(-1 + \frac{x+1}{x^2+1} \right) dx = -x \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx = -1 + S_1$$

$$\bullet \text{ Tính } S_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1} dx$$

$$\text{Đặt } x = \tan t, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow dt = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} t + 1}{\operatorname{tg}^2 t + 1} \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg} t) dt = \left(t - \ln |\cos t| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

Vậy $S = -1 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

2. Chứng minh hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt

$$\text{Xét } \begin{cases} e^x = 2007 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} & (1) \\ e^y = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0, y > 0 \\ y^2 - 1 > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) vế theo vế, ta được:

$$e^x - e^y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

$$\Leftrightarrow e^x - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = e^y - \frac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = e^t - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}, t > 1$

$$f'(t) = e^t + \frac{1}{(t^2 - 1)\sqrt{t^2 - 1}} > 0, \forall t > 1 \Rightarrow f(t) \text{ là hàm số đồng biến } \forall t > 1$$

Do đó: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y > 1$

Với $x = y$: Hệ đã cho tương đương với

$$e^x = 2007 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2007 = 0, x > 1$$

Xét hàm số: $g(x) = e^x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2007, x > 1$

Ta có: $g'(x) = e^x - \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$ và $g''(x) = e^x + \frac{3x}{\sqrt{(x^2 - 1)^5}} > 0, \forall x > 1$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ luôn luôn lõm $\forall x > 1$

ặt khác: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

goài ra: $g(2) < 0$

ó đó phương trình (*) có đúng hai nghiệm phân biệt $x_1 > 1$, $x_2 > 1$

ậy hệ phương trình đã cho luôn luôn có 2 nghiệm phân biệt $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ pcm).

âu V. a

Tìm $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{ét } \begin{cases} A_x^2 + C_y^3 = 22 & (1) \\ A_y^3 + C_x^2 = 66 & (2) \end{cases}$$

$$\text{iều kiện: } \begin{cases} x, y \in \mathbb{N} \\ x \geq 2 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x!}{(x-2)!} + \frac{y!}{3!(y-3)!} = 22 \Leftrightarrow (x-1)x + \frac{1}{6}(y-2)(y-1)y = 22$$

$$\Leftrightarrow 6(x^2 - x) + (y^3 - 3y^2 + 2y) = 132$$

$$\Leftrightarrow \frac{y!}{(y-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 66 \Leftrightarrow (y-2)(y-1)y + \frac{1}{2}(x-1)x = 66$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - x) + 2(y^3 - 3y^2 + 2y) = 132$$

$$\text{ặt } \begin{cases} u = x^2 - x \\ v = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

$$\text{a được hệ: } \begin{cases} 6u + v = 132 \\ u + 2v = 132 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 12 \\ v = 60 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 12 = 0 \\ y^3 - 3y^2 + 2y - 60 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \vee x = -3 \text{ (loại)} \\ (y-5)(y^2 + 2y + 12) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

ậy $x = 4$; $y = 5$.

Xác định tọa độ các đỉnh hình vuông ngoại tiếp (C)

$$(C): (x-4)^2 + (y+3)^2 = 4 \Rightarrow (C) \text{ có tâm } I(4; -3), \text{ bán kính } R = 2$$

hận xét. $I \in (d)$ và $A \in (d)$ nên (d) chứa đường chéo AC.

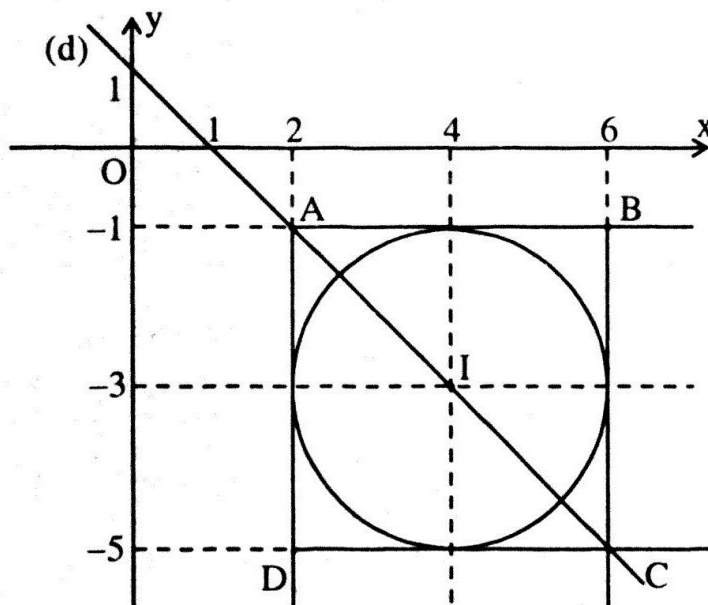
ó đó:

A là giao điểm của các đường thẳng $x = 2$, $y = -1$ nên $A(2; -1)$

- B là giao điểm của các đường thẳng $x = 6, y = -1 \Rightarrow B(6; -1)$
- C là giao điểm của các đường thẳng $x = 6, y = -5 \Rightarrow C(6; -5)$
- D là giao điểm của các đường thẳng $x = 2, y = -5 \Rightarrow D(2; -5)$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD là:

$A(2; -1), B(6; -1), C(6; -5), D(2; -5)$.



Cách khác

(C) có tâm $I(4; -3)$, bán kính $R = 2$

Nhận xét. $I \in (d)$ và $A \in (d)$ nên (d) chứa đường chéo AC.

Gọi (d') là đường thẳng chứa đường chéo BD.

$$(d') \perp (d) \Rightarrow (d'): x - y + C = 0$$

$$I \in (d') \Rightarrow C = -7 \Rightarrow (d'): x - y - 7 = 0$$

Gọi (C') là đường tròn ngoại tiếp hình vuông ABCD thì (C') có tâm $I' \equiv I$ và bán kính $R' = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C') là: $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 8$

A, C là các giao điểm của (d) và (C') nên tọa độ của A, C thỏa hệ:

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 8 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)^2 = 4 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow A(2; -1), C(6; -5)$$

B, D là các giao điểm của (d') và (C') nên tọa độ của A, C thỏa hệ:

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 8 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)^2 = 4 \\ y = x - 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases} \Rightarrow B(6;-1), D(2;-5)$$

Câu Vb.

1. Giải phương trình.

$$\text{Xét } \log_3 (x-1)^2 + \log_{\sqrt{3}} (2x-1) = 2 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$1) \Leftrightarrow 2\log_3 |x-1| + 2\log_3 (2x-1) = 2 \Leftrightarrow \log_3 |x-1| + \log_3 (2x-1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \log_3 [|x-1|(2x-1)] = 1 \Leftrightarrow |x-1|(2x-1) = 3 \quad (2)$$

• Xét $\frac{1}{2} < x < 1$:

$$2) \Leftrightarrow (1-x)(2x-1) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 = 0 : \text{ vô nghiệm}$$

• Xét $x > 1$:

$$2) \Leftrightarrow (x-1)(2x-1) = 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

2. Chứng minh $SC \perp (AHK)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \text{ (do } ABCD \text{ là hình vuông)} \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \quad a\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } AH \perp SB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AH \perp (SBC)$

$$\Rightarrow AH \perp SC \quad (3)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $AK \perp SC \quad (4)$

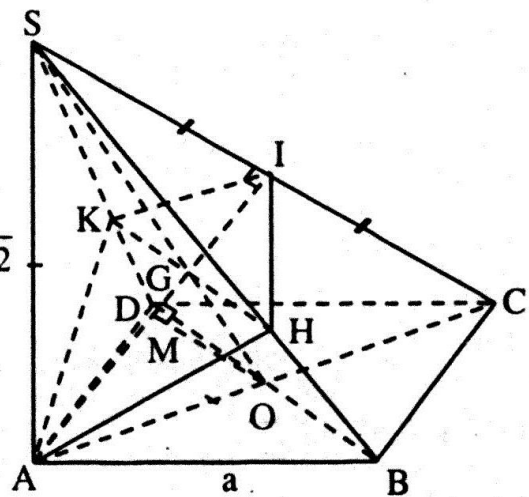
Từ (3) và (4) suy ra: $SC \perp (AHK)$ (đpcm).

• Tính thể tích hình chóp $OAHK$

$$\Delta SAB \text{ vuông tại } A \text{ ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{Do } \Delta SAB = \Delta SAC \text{ nên } AH = AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Gọi $G = SO \cap HK$ và $I = AG \cap SC$



ΔSAC có $SA = AC = a\sqrt{2}$ nên vuông cân tại $A \Rightarrow SC = 2a$

Mặt khác: $SC \perp AI$ (do $SC \perp (AHK)$) $\Rightarrow I$ là trung điểm của SC

G là giao điểm của hai đường trung tuyến AI và SO nên là trọng tâm của ΔSAC .

Ngoài ra: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$

Mà $SC \perp (AHK) \Rightarrow BD \parallel (AHK)$

Do đó mặt phẳng (AHK) cắt mặt phẳng (SBD) theo giao tuyến $HK \parallel BD$.

Ta có: $\frac{HK}{BD} = \frac{SG}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3}BD = \frac{2a\sqrt{2}}{3}$.

Nửa chu vi tam giác AHK là: $p = \frac{1}{2}(AH + AK + HK) = \frac{a\sqrt{2} + a\sqrt{6}}{3}$

Diện tích tam giác AHK là:

$$S_{AHK} = \sqrt{p(p-AH)(p-AK)(p-HK)}$$

$$= \sqrt{\frac{a\sqrt{2} + a\sqrt{6}}{3} \left(\frac{a\sqrt{2} + a\sqrt{6}}{3} - \frac{a\sqrt{6}}{3} \right) \left(\frac{a\sqrt{2} + a\sqrt{6}}{3} - \frac{2a\sqrt{2}}{3} \right)} = \frac{2a^2\sqrt{2}}{9}$$

Gọi M là trung điểm của AI thì $OM \parallel IC$ và $OM = \frac{1}{2}IC = \frac{a}{2}$.

Mà $SC \perp (AHK)$ nên $OM \perp (AHK)$.

Thể tích hình chóp $OAHK$ là: $V = \frac{1}{3}S_{AHK} \cdot OM = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a^2\sqrt{2}}{9} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}$.

ĐỀ 52

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, KHỐI B, NĂM 2007

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = -x + 1 + \frac{m}{2-x}$ (C_m).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số với $m = 1$.
2. Tìm m để đồ thị (C_m) có cực đại tại điểm A sao cho tiếp tuyến với (C_m) tại A cắt trục Oy tại B mà tam giác OAB vuông cân.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \tan x - \cot x$.

2. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$ có đúng một nghiệm.

Câu III. (2 điểm).

Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(2; 0; 0)$, $M(0; -3; 6)$.

1. Chứng minh mặt phẳng (P): $x + 2y - 9 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu tâm M bán kính MO. Tìm tọa độ tiếp điểm.
2. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A, M và cắt các trục Oy, Oz tại các điểm tương ứng B, C sao cho thể tích tứ diện OABC bằng 3.

Câu IV. (2 điểm)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2$ và $y = \sqrt{2 - x^2}$.
2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2 - 2x + 9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2 - 2y + 9}} = y^2 + x. \end{cases}$$

Câu Va. (Cho chương trình THPT không phân ban) (2 điểm)

1. Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $(x^2 + 2)^n$, biết $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49$.
2. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') tâm M(5; 1), biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho độ dài đoạn AB bằng $\sqrt{3}$.

Câu Vb. (Cho chương trình THPT phân ban) (2 điểm)

1. Giải phương trình : $(2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$.
2. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc nửa đường tròn đó sao cho $AC = R$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S sao cho $\left((\widehat{SAB}), (\widehat{SBC}) \right) = 60^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB, SC. Chứng minh tam giác AHK vuông và tính thể tích hình chóp S.ABC.

GIẢI

Câu I

1. Khảo sát hàm số với $m = 1$

Khi $m = 1$, ta có $y = -x + 1 + \frac{1}{2 - x}$

- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

- $y' = -1 + \frac{1}{(1-2)^2} = \frac{-(x-2)^2 + 1}{(x-1)^2}$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 3 \Rightarrow y = -3 \end{cases}$$

- Giới hạn và tiệm cận

$\lim_{x \rightarrow 2} y = \pm\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng

$$\begin{cases} y = -x + 1 - \frac{1}{x-2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -x + 1 \text{ là tiệm cận xiên}$$

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
y'	-	0	+	+	0	-
y	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$

CT CD

- Điểm đặc biệt : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

- Đồ thị

2. Tìm m

$$y = -x + 1 + \frac{m}{2-x} \text{ (Cm)}$$

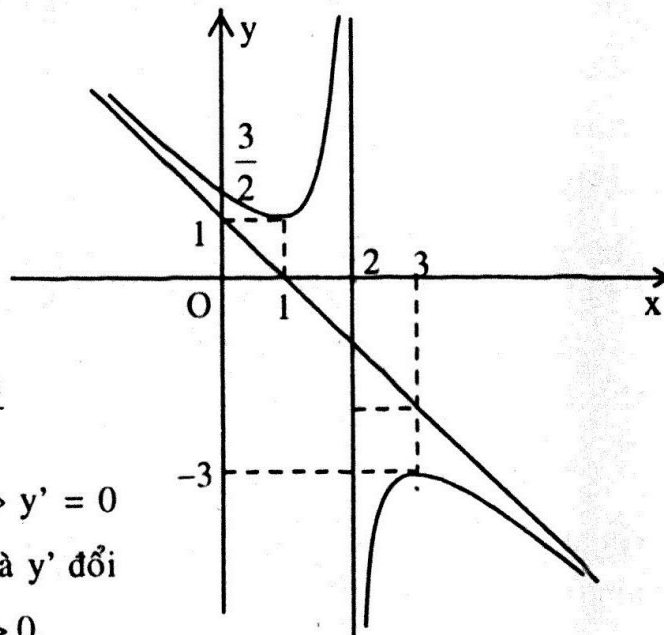
Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$y' = -1 + \frac{m}{(x-2)^2} = \frac{-(x-2)^2 + m}{(x-2)^2}$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$

hay $(x-2)^2 = m$ có hai phân biệt và y' đổi dấu khi x qua hai nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$.

$$\text{Khi đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{m} \Rightarrow y = -1 + 2\sqrt{m} \\ x = 2 + \sqrt{m} \Rightarrow y = -1 - 2\sqrt{m} \end{cases}$$



Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{m}$	2	$2 - \sqrt{m}$	$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$				$-\infty$

$\swarrow$ CT $\nearrow$ $\swarrow$ CD $\searrow$

Từ bảng biến thiên ta thấy điểm cực đại của (C_m) là $A(2 + \sqrt{m}; -1 - 2\sqrt{m})$

Phương trình tiếp tuyến Δ của (C_m) tại A là: $y = -1 - 2\sqrt{m}$.

$$B = \Delta \cap Oy \Rightarrow B(0; -1 - 2\sqrt{m}).$$

Tam giác OBA vuông cân tại B $\Leftrightarrow OB = AB$

$$\Leftrightarrow |y_B| = |x_A| \Leftrightarrow 1 + 2\sqrt{m} = 2 + \sqrt{m} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa } m > 0)$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = 1$.

Câu II

1. Giải phương trình

Xét $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \operatorname{tg} x - \cot x$ (1)

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

$$(1) \Leftrightarrow \sin 2x \sin x + \cos 2x \cos x = \sin^2 x - \cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 1 - 2\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \text{ (loại, do } \sin x \neq 0) \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của phương trình là: $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

2. Tìm m để phương trình có đúng một nghiệm

Ta có: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 - 13x + m} = 1 - x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x^4 - 13x + m = (1 - x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ -4x^3 + 6x^2 + 9x + 1 = m \end{cases}$$

Xét hàm số: $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 9x + 1, x \leq 1$

$$f'(x) = -12x^2 + 12x + 9$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	
y'	-	0	+	
y	$+\infty$	$\frac{3}{2}$	12	

Từ bảng biến thiên, ta thấy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{3}{2} \\ m > 12. \end{cases}$$

Câu III.

1.

• **Chứng minh (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm M**

Ta có: $MO = 3\sqrt{5}$

Khoảng cách từ điểm M đến (P) là: $d(M, (P)) = \frac{|0 + 2(-3) - 9|}{\sqrt{1 + 4 + 0}} = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5} = MO$

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu tâm M, bán kính MO.

• **Tìm tọa độ tiếp điểm**

Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) thì Δ nhận $\vec{n}_P = (1; 2; 0)$ làm vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của Δ là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = -3 + 2t \\ z = 6 \end{cases}$$

Tham số t ứng giao điểm $H = \Delta \cap (P)$ là nghiệm của phương trình:

$$t + 2(-3 + 2t) - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \Rightarrow H(3; 3; 6).$$

Vậy tiếp điểm cần tìm là $H(3; 3; 6)$.

2. **Viết phương trình mặt phẳng (Q)**

Ta có: $\vec{AM} = (-2; -3; 6)$

Phương trình đường thẳng AM đi qua điểm A và có vectơ chỉ phương $\vec{AM}$ là

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

Mặt phẳng (Q) chứa AM nên có phương trình là:

$$m(3x - 2y - 6) + n(2y + z) = 0 \quad (m^2 + n^2 \neq 0)$$

$$\Rightarrow 3mx + (2n - 2m)y + nz - 6m = 0$$

$$B = Oy \cap (Q) \Rightarrow B\left(0; \frac{3m}{n-m}; 0\right)$$

$$C = Oz \cap (Q) \Rightarrow C\left(0; 0; \frac{6m}{n}\right)$$

$$\text{Ta có: } V_{OABC} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot 2 \left| \frac{3m}{n-m} \right| \cdot \left| \frac{6m}{n} \right| = 3 \Leftrightarrow 2m^2 = |n(n-m)|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m^2 = n(n-m) \\ 2m^2 = n(m-n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 - mn - 2m^2 = 0 \\ n^2 - mn + 2m^2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -m: \text{ chọn } m=1, n=-1 \\ n = 2m: \text{ chọn } m=1, n=2 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là: $(Q_1): 3x - 4y - z - 6 = 0$

$$(Q_2): 3x + 2y + 2z - 6 = 0.$$

Cách khác

Giả sử mặt phẳng (Q) cắt các trục Oy, Oz lần lượt tại $B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ ($bc \neq 0$).

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng: $\frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$$M(0; -3; 6) \in (Q) \Rightarrow -\frac{3}{b} + \frac{6}{c} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } V_{OABC} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot 2 |b| \cdot |c| = 3 \Leftrightarrow |bc| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} bc = -9 \\ bc = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -\frac{9}{b} \\ c = \frac{9}{b} \end{cases}$$

$$\text{Với } c = -\frac{9}{b}: (1) \Leftrightarrow 2b^2 + 3b + 9 = 0: \text{ vô nghiệm}$$

$$\text{Với } c = \frac{9}{b}: (1) \Leftrightarrow 2b^2 - 3b - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \Rightarrow c = 3 \\ b = -\frac{3}{2} \Rightarrow c = -6 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng cần tìm là: $(Q_1): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y + 2z - 6 = 0$

$$(Q_2): \frac{x}{2} - \frac{2y}{3} - \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow 3x - 4y - z - 6 = 0$$

Câu IV.

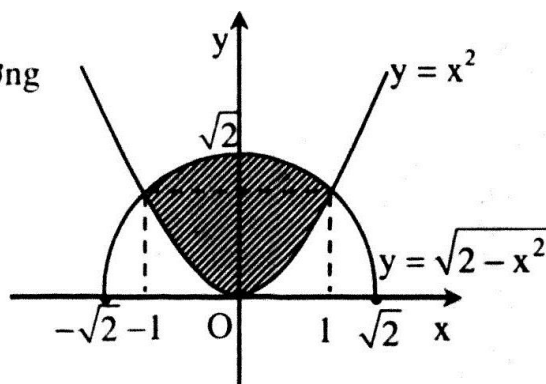
1. Tính diện tích hình phẳng

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường

$$y = x^2 \text{ và } y = \sqrt{2-x^2} \text{ là: } x^2 = \sqrt{2-x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = -2 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$



Dựa vào đồ thị ta có diện tích cần tìm là:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx = 2 \int_0^1 (\sqrt{2-x^2} - x^2) dx \\ &= 2 \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx - 2 \int_0^1 x^2 dx = 2S_1 - \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = 2S_1 - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

• Tính $S_1 = \int_0^1 \sqrt{2-x^2} dx$

Đặt $x = \sqrt{2} \sin t \Rightarrow dx = \sqrt{2} \cos t dt \left(t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \right)$

Đổi cận:

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{4}$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2(1-\sin^2 t)} \cdot \sqrt{2} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt$$

$$= \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow S = 2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$$

2. Giải hệ phương trình

Ta có:

$$\begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2-2x+9}} = x^2 + y \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{y^2-2y+9}} = y^2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2+8}} = x^2 + y & (1) \\ y + \frac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2+8}} = y^2 + x & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) cộng (2) vế theo vế, ta được: $x^2 + y^2 = \frac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}}$

Nhận xét.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} \geq 2, & \sqrt[3]{(y-1)^2 + 8} \geq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{2xy}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} + \frac{2xy}{\sqrt[3]{(y-1)^2 + 8}} \leq \frac{2xy}{2} + \frac{2xy}{2} = 2xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \leq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \leq 0 \Rightarrow x = y$$

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8}} = x^2 \Leftrightarrow x^2 \left[\sqrt[3]{(x-1)^2 + 8} - 2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0 \vee x = y = 1.$$

Thử lại, ta thấy $x = y = 0$ hay $x = y = 1$ là nghiệm của hệ phương trình.

Câu V. a.

1. Tìm hệ số của x^8 .

Ta có: $A_n^3 - 8C_n^2 + C_n^1 = 49 \quad (n \in \mathbb{R}; n \geq 3)$

$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-3)!} - 8 \frac{n!}{2!(n-2)!} + n = 49$$

$$\Leftrightarrow (n-2)(n-1)n - 4(n-1)n + n = 49$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 7n^2 + 7n - 49 = 0 \Leftrightarrow n = 7 \text{ (thỏa } n \geq 3)$$

Với $n = 7$, ta có: $(x^2 + 2)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k (x^2)^{7-k} 2^k = \sum_{k=0}^7 C_7^k 2^k x^{14-2k}$

Số hạng chứa x^8 ứng với k thỏa: $14 - 2k = 8 \Leftrightarrow k = 3$

Vậy hệ số của x^8 là: $C_7^3 2^3 = 280$.

2. Viết phương trình đường tròn (C')

Phương trình đường tròn (C) được viết lại: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$

Đường tròn (C) có tâm $I(1; -2)$, bán kính $R = \sqrt{3}$.

Phương trình đường tròn (C') có tâm M và bán kính R' là:

$$(x-5)^2 + (y-1)^2 = R'^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26 - R'^2 = 0$$

Đường thẳng qua hai điểm A, B là trục đẳng phương của (C) và (C')

Phương trình đường thẳng AB là:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = x^2 + y^2 - 10x - 2y + 26 - R'^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8x + 6y + R'^2 - 24 = 0$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên AB thì H là trung điểm của đoạn

$$AB \Rightarrow HA = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{2}$$

Mặt khác: $d(I, (AB)) = IH$

$$\Leftrightarrow \frac{|R'^2 - 28|}{10} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow |R'^2 - 28| = 15$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R'^2 = 43 \\ R'^2 = 13 \end{cases}$$

Vậy có hai đường tròn cần tìm là:

$$(C'_1): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 43$$

$$(C'_2): (x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

Câu V. b.

1. Giải phương trình

$$(2 - \log_3 x) \log_{9x} 3 - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ 9x \neq 1 \\ \log_3 x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{9} \\ x \neq 3 \end{cases}$$

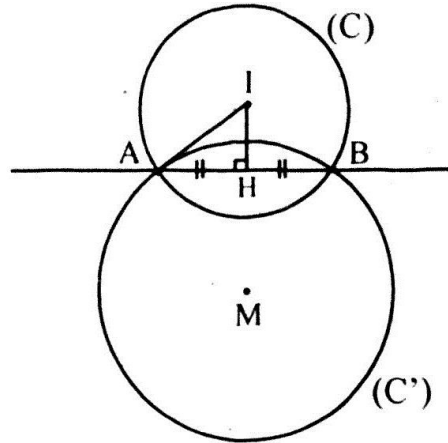
$$(1) \Leftrightarrow \frac{2 - \log_3 x}{\log_3(9x)} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1 \Leftrightarrow \frac{2 - \log_3 x}{2 + \log_3 x} - \frac{4}{1 - \log_3 x} = 1$$

Đặt $t = \log_3 x$ ($t \neq -2, t \neq 1$)

$$\text{Ta có: } \frac{2-t}{2+t} - \frac{4}{1-t} = 1 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \\ \log_3 x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 81 \end{cases}$$

So với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là $x = \frac{1}{3}$ hay $x = 81$.



• Chứng minh tam giác AHK vuông

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AC \text{ (do C thuộc nửa đường tròn đường kính AB)} \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AK \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } AK \perp SC \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $AK \perp (SBC) \Rightarrow AK \perp KH$

Vậy tam giác AHK vuông tại K (đpcm).

• Tính thể tích tứ diện SABC

Gọi O là trung điểm của AB và I là trung điểm của OA.

Tam giác OAC có $OA = OC = AC = R$ nên là tam giác đều.

$$\text{Suy ra: } CI \perp OA \text{ và } CI = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Mặt khác: } CI \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \Rightarrow CI \perp (SAB) \Rightarrow CI \perp SB$$

$$\text{Từ I kẻ } IM \perp SB \text{ tại M, ta có: } \begin{cases} SA \perp IM \\ SA \perp CI \end{cases} \Rightarrow SA \perp (MCI)$$

$$\Rightarrow SA \perp CM \Rightarrow \widehat{CMI} \text{ là góc của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC)} \Rightarrow \widehat{CMI} = 60^\circ$$

$$\Delta CIM \text{ vuông tại I, ta có: } IM = CI \cotg 60^\circ = \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{R}{2}$$

ΔIMB vuông tại M ta có:

$$BM = \sqrt{IB^2 - IM^2} = \sqrt{\frac{9R^2}{4} - \frac{R^2}{4}} = R\sqrt{2}, \text{ với } IB = \frac{3}{4}AB = \frac{3R}{2}$$

$$\Rightarrow \tg \widehat{SBA} = \frac{IM}{BM} = \frac{\frac{R}{2}}{R\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$SA = AB \cdot \tg \widehat{SBA} = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

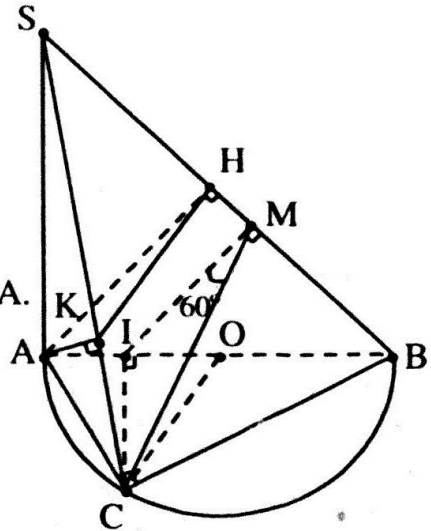
Thể tích tứ diện SABC là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot SA, \text{ với } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = R\sqrt{3} \\ &= \frac{1}{6} \cdot R \cdot R\sqrt{3} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^3\sqrt{6}}{12}. \end{aligned}$$

Cách khác

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SB \perp AH \\ SB \perp AK \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AHK) \Rightarrow SB \perp HK$$

$$\Rightarrow \widehat{AHK} = 60^\circ \text{ là góc hợp bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).}$$



ΔAHK vuông tại K, ta có:

$$AK = AH \sin 60^\circ = \frac{AH\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{AH^2} = \frac{3}{AK^2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{4R^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{R^2} \quad (3)$$

Thế (2) và (3) vào (1), ta có:

$$4\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{4R^2}\right) = 3\left(\frac{1}{SA^2} + \frac{1}{R^2}\right) \Leftrightarrow SA^2 = \frac{R^2}{2} \Rightarrow SA = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Ngoài ra: Điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên tam giác ABC vuông tại C $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = R\sqrt{3}$.

$$\text{Diện tích tam giác ABC là: } S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Thể tích tứ diện SABC là: } V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{R^2 \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^3 \sqrt{6}}{12}.$$

ĐỀ 53

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 1, KHỐI D, NĂM 20007

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{2x+1}$ (C).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến đó qua giao điểm của tiệm cận đứng và trục Ox.

Câu II. (2 điểm).

$$1. \text{ Giải phương trình: } 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos x = 1.$$

2. Tìm m để phương trình:

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5} = m \text{ có đúng hai nghiệm.}$$

Câu III. (2 điểm).

Trong không gian Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng

$$(P): x + y + z + 2 = 0.$$

- Tìm giao điểm của d và (P) .
- Viết phương trình đường thẳng Δ chứa trong mặt phẳng (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ bằng $\sqrt{42}$.

Câu IV. (2 điểm)

- Tính tích phân $\int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx$.
- Cho a, b là các số dương thỏa mãn $ab + a + b = 3$.
 Chứng minh rằng: $\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$.

Câu Va. (Cho chương trình THPT không phân ban) (2 điểm)

- Chứng minh với mọi n nguyên dương ta luôn có:

$$nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + \dots + 2C_n^{n-2} - C_n^{n-1} = 0.$$
- Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(2; 1)$. Lấy điểm B thuộc trục Ox có hoành độ $x \geq 0$ và điểm C thuộc trục Oy có tung độ $y \geq 0$ sao cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm B, C sao cho diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Câu Vb. (Cho chương trình THPT phân ban) (2 điểm)

- Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$.
- Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = AC = a$, $AA_1 = a\sqrt{2}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của đoạn AA_1 và BC_1 . Chứng minh MN là đường vuông góc chung của gốc đường thẳng AA_1 và BC_1 . Tính thể tích tứ diện MA_1BC_1 .

GIẢI

Câu I.

- **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{-x+1}{2x+1}$ (C)
- Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$
- $y' = \frac{-3}{(2x+1)^2} < 0, \forall x \in D$
- Giới hạn và tiệm cận
 $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} y = \pm \infty \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng.
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-		-
y	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$	$-\frac{1}{2}$

- Điểm đặc biệt: $x = 0 \Rightarrow y = 1$; $y = 0 \Rightarrow x = 1$
- Đồ thị:

2. Viết phương trình tiếp tuyến với (C).

Giao điểm của tiệm cận đứng với trục Ox là:

$$M\left(-\frac{1}{2}; 0\right).$$

Phương trình tiếp tuyến Δ qua M với hệ số

góc k có dạng: $y = k\left(x + \frac{1}{2}\right)$

Δ tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{-x+1}{2x+1} = k\left(x + \frac{1}{2}\right) & (1) \\ \frac{-3}{(2x+1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta được:

$$\frac{-x+1}{2x+1} = \frac{-3}{(2x+1)^2} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4x^2 - 8x - 5 = 0 \left(x \neq -\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

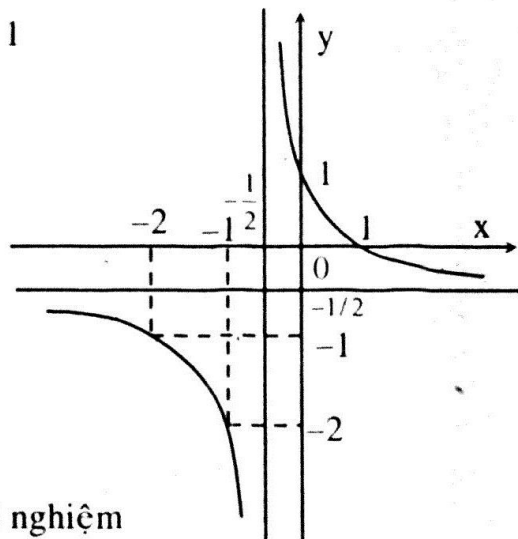
Vậy tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Câu II.

1. Giải phương trình

Ta có:

$$2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) - \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{12} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\frac{5\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Tìm m để phương trình có đúng hai nghiệm.

$$\text{Xét } \sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5} = m \quad (1)$$

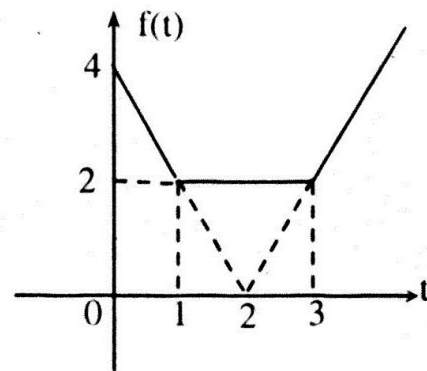
Điều kiện: $x \geq 4$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x-4} \quad (t \geq 0) \Rightarrow x = t^2 + 4$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t + 1} + \sqrt{t^2 - 6t + 9} = m \Leftrightarrow |t-1| + |t-3| = m$$

Xét hàm số: $f(t) = |t-1| + |t-3|, t \geq 0$

$$f(t) = \begin{cases} -2t + 4, & \text{nếu } 0 \leq t \leq 1 \\ 2, & \text{nếu } 1 \leq t \leq 3 \\ 2t - 4, & \text{nếu } t \geq 3 \end{cases}$$



Ta vẽ đồ thị của hàm số $f(t)$ như hình bên.

Từ đồ thị ta thấy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow 2 < m \leq 4$.

Câu III.

1. Tìm giao điểm của d và (P)

$$\text{Phương trình tham số của } d \text{ là: } \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Tham số t ứng với tọa độ giao điểm $M = d \cap (P)$ là nghiệm của phương trình

$$3 + 2t - 2 + t - 1 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow M(1; -3; 0).$$

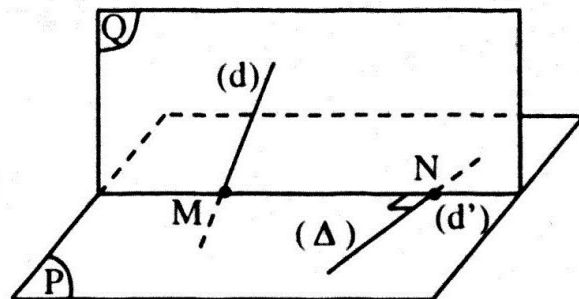
2. Viết phương trình đường thẳng Δ

(P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1; 1)$

(d) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 1; -1)$

Gọi $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ , ta có:

$$\begin{cases} \Delta \subset (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \\ \Delta \perp (d) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{a} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \vec{u} = [\vec{n}, \vec{a}] = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2; 3; -1)$$

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P) thì (Q) qua M và nhận $\vec{a}, \vec{n}$ làm cặp vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow (Q) \text{ có vectơ pháp tuyến } \vec{u} = [\vec{n}, \vec{a}] = (-2; 3; -1)$$

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng:

$$2(x-1) - 3(y+3) + z = 0 \Leftrightarrow 2x - 3y + z - 11 = 0$$

Gọi (d') là hình chiếu vuông góc của (d) trên (P) thì (d') là giao tuyến của (P) và (Q).

$$\text{Phương trình của (d')} \text{ là: } \begin{cases} x + y + z + 2 = 0 \\ 2x - 3y + z - 11 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Phương trình tham số của (d')} \text{ là: } \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 + t \\ z = -5t \end{cases}$$

Ta sẽ tìm trên (d') điểm N sao cho độ dài đoạn MN bằng $\sqrt{42}$

Đặt $N(1 + 4t; -3 + t; -5t) \in (d')$

$$\overrightarrow{MN} = (4t; t; -5t). \text{ Ta có: } MN = \sqrt{42} \Leftrightarrow MN^2 = 42$$

$$\Leftrightarrow 16t^2 + t^2 + 25t^2 = 42 \Leftrightarrow t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow N_1(5; -2; -5) \\ t = -1 \Rightarrow N_2(-3; -4; 5) \end{cases}$$

Δ là đường thẳng qua điểm N và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$

Phương trình đường thẳng Δ_1 qua N_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+5}{-1}.$$

Phương trình đường thẳng Δ_2 qua N_2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-1}.$$

Cách khác

$$\text{Gọi } N(x; y; z) \in \Delta \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (x-1; y+3; z)$$

Theo đề bài, ta có:

- $\Delta \subset (P) \Rightarrow N \in (P) \Rightarrow x + y + z + 2 = 0 \quad (1)$
- $\Delta \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) + 3(y+3) - z = 0$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + z - 11 = 0 \quad (2)$$

$$\bullet \quad d(M, \Delta) = MN = \sqrt{42} \Leftrightarrow MN^2 = 42$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 42 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có: } x = 4y + 13, z = -5y - 15 \quad (4)$$

Thế (4) vào (3), ta được:

$$(4y+12)^2 + (y+3)^2 + (5y+15)^2 = 42$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \Rightarrow x = 5, z = -5 \\ y = -4 \Rightarrow x = -3, z = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow N_1(5; -2; -5), N_2(-3; -4; 5).$$

Phương trình đường thẳng Δ_1 qua N_1 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$\frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+5}{-1}.$$

Phương trình đường thẳng Δ_2 qua N_2 và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ là:

$$\frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-5}{-1}.$$

Câu IV.

1. Tính tích phân

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2-4} + \frac{4}{x^2-4} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left(x - \frac{1}{2} \ln|x^2-4| + \ln|x-2| - \ln|x+2| \right) \Big|_0^1 \\ &= \left(x - \frac{1}{2} \ln|x^2-4| + \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right) \Big|_0^1 = 1 + \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3. \end{aligned}$$

2. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{3a}{b+1} + \frac{3b}{a+1} + \frac{ab}{a+b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } 3 = ab + a + b \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + a + b$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + 4(a+b) - 12 \geq 0 \Rightarrow a+b \geq 2 \quad (\text{vì } a > 0, b > 0).$$

Mặt khác:

$$(1) \Leftrightarrow 3 \left(\frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab + a + b + 1} \right) + \frac{ab}{a + b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left(\frac{a^2 + b^2 + a + b}{4} \right) + \frac{ab}{a + b} \leq a^2 + b^2 + \frac{3}{2} \quad (\text{do } ab + a + b = 3)$$

$$\Leftrightarrow 3(a + b) + \frac{4ab}{a + b} \leq (a + b)^2 - 2ab + 6$$

$$\Leftrightarrow 3(a + b) + \frac{4[3 - (a + b)]}{a + b} \leq (a + b)^2 - 2[3 - (a + b)] + 6$$

$$\Leftrightarrow a + b + \frac{12}{a + b} \leq (a + b)^2 + 4$$

Đặt $u = a + b$ ($u \geq 2$), ta có:

$$u + \frac{12}{u} \leq u^2 + 4 \Leftrightarrow u^3 - u^2 + 4u - 12 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (u - 2)(u^2 + u + 6) \geq 0 : \text{luôn luôn đúng với mọi } u \geq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi:

$$\begin{cases} ab + a + b = 3 \\ a + b = 2 \\ a = b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 1.$$

Câu V. a

1. Chứng minh đẳng thức

Xét nhị thức sau với n chẵn: $(x - 1)^n = C_n^0 x^{n-1} - C_n^2 x^{n-1} + \dots + C_n^{n-2} x^2 - C_n^{n-1} x + C_n^n$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được :

$$n(x - 1)^{n-1} = nC_n^0 x^{n-1} - (n-1)C_n^1 x^{n-2} + \dots + 2C_n^{n-2} x - C_n^{n-1}$$

Thay $x = 1$, ta có: $nC_n^0 - (n-1)C_n^1 + \dots + 2C_n^{n-2} - C_n^{n-1} = 0$ (đpcm).

Với n lẻ, không thỏa yêu cầu bài toán.

2. Tìm tọa độ của B và C

Đặt $B(x; 0) \in Ox$ và $C(0; y) \in Oy$ ($x \geq 0, y \geq 0$)

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (x - 2; -1)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; y - 1)$

Tam giác ABC vuông tại A nên ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -2(x - 2) - (y - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 - 2x$$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 5 - 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{5}{2}$$

Diện tích tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \sqrt{(x-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{4 + (y-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(x-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{4 + (4-2x)^2} = (x-2)^2 + 1$$

$$S = x^2 - 4x + 5, x \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$$

$$S' = 2x - 4; S' = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Ta có: } S(0) = 5, S(2) = 1, S\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \max_{\left[0; \frac{5}{2}\right]} S = 5, \text{ khi } x = 0 \Rightarrow y = 5$$

Vậy B(0;0), C(0;5).

Câu V.b.

1. Giải bất phương trình

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2x^2 - 3x + 1} + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \vee x > 1$$

$$(1) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \log_2 (2x^2 - 3x + 1) + \frac{1}{2} \log_2 (x-1)^2 \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \log_2 (2x^2 - 3x + 1) \leq \log_2 (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow \log_2 [2(2x^2 - 3x + 1)] \leq \log_2 (x-1)^2 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 3x + 1) \leq (x-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1.$$

So với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là: $\frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}$.

2. Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA₁

Từ giả thiết suy ra ABC là tam giác vuông cân tại A.

Gọi I là trung điểm cạnh BC, ta có:

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ AI \perp BB_1 \end{cases} \Rightarrow AI \perp (BCC_1B_1) \Rightarrow AI \perp BC_1$$

Mặt khác: AI $\perp$ AA₁ (do AA₁ $\perp$ (ABC))

Ngoài ra: IN là đường trung bình của tam giác BCC₁ nên ta có:

$$\begin{cases} IN // CC_1 \Rightarrow IN \perp AI \\ IN = \frac{1}{2}CC_1 = AM \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác AMNI là hình chữ nhật

$\Rightarrow MN // AI$

$\Rightarrow MN$ vuông góc với AA_1 và BC_1 lần lượt tại M và N.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AA_1 và BC_1

• **Tính thể tích tứ diện MA_1BC_1**

Ta có: $\begin{cases} BA \perp AC \\ BA \perp AA_1 \end{cases} \Rightarrow BA \perp (AA_1C_1C) \equiv (MA_1C_1)$

Do đó thể tích tứ diện MA_1BC_1 là :

$$V = \frac{1}{3}S_{MA_1C_1} \cdot BA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} MA_1 \cdot A_1C_1 \cdot BA = \frac{1}{6} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot a = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Cách khác

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ

Ta có: $A \equiv O(0; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$, $C(0; a; 0)$,

$A_1(0; 0; a)$, $B_1(a; 0; a)$, $C_1(0; a; a)$.

M, N lần lượt là trung điểm của AA_1 và BC_1 nên

$$M\left(0; 0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

• **Chứng minh MN là đường vuông góc chung của AA_1 và BC_1**

Ta có: $\overrightarrow{AA_1} = (0; 0; a\sqrt{2})$, $\overrightarrow{BC_1} = (-a; a; a\sqrt{2})$, $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

Để thấy: $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC_1} = 0$

Vậy MN là đường vuông góc chung của AA_1 và BC_1 .

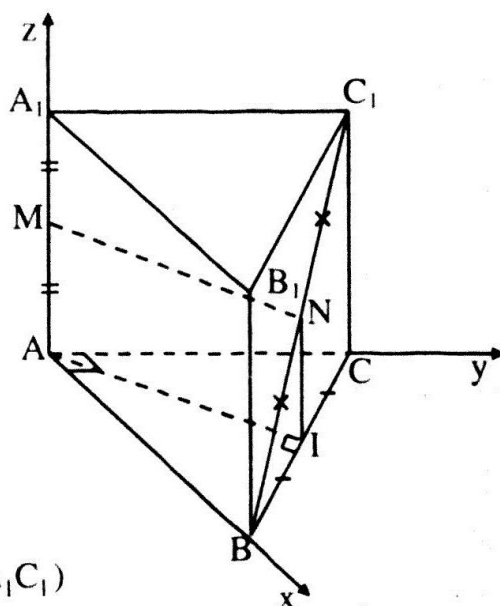
• **Tính thể tích tứ diện MA_1BC_1**

Ta có: $\overrightarrow{MA_1} = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{MC_1} = \left(0; a; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{MB} = \left(a; 0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\text{và } [\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$$

Thể tích tứ diện MA_1BC_1 là:

$$V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{MA_1}, \overrightarrow{MC_1}] \cdot \overrightarrow{MB}| = \frac{1}{6} \left| \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right) \cdot a \right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$



ĐỀ 54

ĐỀ THAM KHẢO SỐ 2, KHỐI D, NĂM 2007

Câu I. (2 điểm).

Cho hàm số $y = \frac{x}{x-1} \cdot (C)$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) sao cho d và hai đường tiệm cận của (C) cắt nhau tạo thành một tam giác cân.

Câu II. (2 điểm).

1. Giải phương trình: $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$.
2. Tìm m để hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$$
 có nghiệm duy nhất.

Câu III. (2 điểm).

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ và các đường

thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$, $d_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa d_1 và vuông góc với mặt phẳng (P).
2. Tìm các điểm M thuộc d_1 và N thuộc d_2 sao cho đường thẳng MN song song với mặt phẳng (P) và cách (P) một khoảng bằng 2.

Câu IV. (2 điểm)

1. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.
2. Giải phương trình: $\log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$.

Câu Va. (Cho chương trình THPT không phân ban) (2 điểm)

1. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 4 chữ số khác nhau.
2. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm A(0; 1), B(2; -1) và các đường thẳng:
 $d_1: (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0$;
 $d_2: (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0$.

Chứng minh d_1 và d_2 luôn cắt nhau. Gọi P là giao điểm của d_1 và d_2 , tìm m sao cho PA + PB lớn nhất.

Câu Vb. (Cho chương trình THPT phân ban) (2 điểm)

1. Giải phương trình : $2^{3x+1} - 7 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$.
2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A_1B_1C_1$ có tất cả các cạnh đều bằng a . M là trung điểm của đoạn AA_1 . Chứng minh BM vuông góc với B_1C và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và B_1C .

GIẢI

Câu I.

1. **Khảo sát hàm số:** $y = \frac{x}{x-1}$ (C)

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$
- Giới hạn và tiệm cận
 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \pm\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang

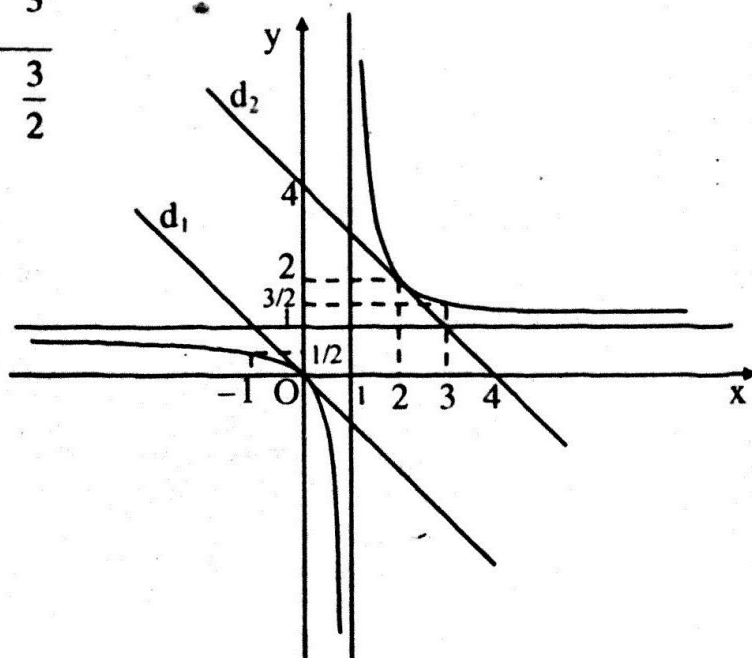
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	-	-	-
y	$-\infty$	$+\infty$	1

- Điểm đặc biệt

x	-1	0	2	3
y	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{3}{2}$

- Đồ thị



2. Viết phương trình tiếp tuyến d

Từ đồ thị ta thấy tiếp tuyến d tạo với hai đường tiệm cận một tam giác vuông cân nên d có hệ số góc là $k = -1$

Phương trình tiếp tuyến d có dạng: $y = -x + b$

l tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ Hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{x}{x-1} = -x + b & (1) \\ \frac{-1}{(x-1)^2} = -1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow b = 0 \\ x = 2 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $d_1: y = -x$; $d_2: y = -x + 4$.

Câu II

1. Giải phương trình

$$(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = (1 + \operatorname{tg} x)(1)$$

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(\cos 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x + \sin x = 0 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

So với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

2. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} 2x - y - m = 0 & (1) \\ x + \sqrt{xy} = 1 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $xy \geq 0$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ xy = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ y = x - 2 + \frac{1}{x} \end{cases} \quad (3) \text{ (do } x = 0 \text{ không thỏa phương trình)}$$

Thế (3) vào (1) ta có: $2x - \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) - m = 0 \Leftrightarrow x + 2 - \frac{1}{x} = m \quad (*)$

Xét hàm số: $f(x) = x + 2 - \frac{1}{x}$, với $x \leq 1$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \leq 1$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	2

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất $x_0 \leq 1$ và $x_0 \neq 0$.

Từ bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m > 2$.

Câu III.

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q)

d_1 đi qua điểm $A(1; 3; 0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; -3; 2)$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2; 2)$

(Q) chứa d_1 và vuông góc với (P) nên (Q) qua A và nhận $\vec{a}, \vec{n}$ làm cặp vectơ chỉ phương $\Rightarrow$ Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n'} = [\vec{a}, \vec{n}] = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (-2; -2; -1)$$

Phương trình mặt phẳng (Q) có dạng :

$$2(x - 1) + 2(y - 3) + z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + z - 8 = 0.$$

2. Tìm tọa độ các điểm M và N

Phương trình tham số của d_1 và d_2 là

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases}; d_2 : \begin{cases} x = 5 + 6t' \\ y = 4t' \\ z = -5 - 5t' \end{cases}$$

Đặt $M(1 + 2t; 3 - 3t; 2t) \in d_1$ và $N(5 + 6t'; 4t'; -5 - 5t') \in d_2$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (6t' - 2t + 4; 4t' + 3t - 3; -5t' - 2t - 5).$$

Theo đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} MN // (P) \\ d(MN, (P)) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0 \\ d(M, (P)) = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \cdot (6t' - 2t + 4) - 2(4t' + 3t - 3) + 2(-5t' - 2t - 5) = 0 \\ \frac{|12t - 6|}{3} = 2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = 0 \\ |2t - 1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + t' = 0 \\ t = 1 \vee t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} t = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} M(3; 0; 2) \\ N(-1; -4; 0) \end{cases} \vee \begin{cases} M(1; 3; 0) \\ N(5; 0; -5) \end{cases}. \end{aligned}$$

Cách khác

Ta có: $d(M, (P)) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{|12t - 6|}{3} = 2 \Leftrightarrow |2t - 1| = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \Rightarrow M_1(3; 0; 2) \\ t = 0 \Rightarrow M_2(1; 3; 0) \end{cases}$$

Do $MN // (P)$ nên N là giao điểm của d_2 với mặt phẳng qua M và song song với (P).

Gọi (α) là mặt phẳng qua M_1 và song song với (P) thì phương trình của (α) có dạng: $x - 2y + 2z + D = 0$ ($D \neq 0$)

$$M_1 \in (\alpha) \Rightarrow D = -7 \Rightarrow (\alpha): x - 2y + 2z - 7 = 0$$

$$N_1 \in (\alpha) \Rightarrow t' = -1 \Rightarrow N_1(-1; -4; 0)$$

Gọi (β) là mặt phẳng qua M_2 và song song với (P)

$$\Rightarrow (\beta): x - 2y + 2z + 5 = 0$$

$$N_2 \in (\beta) \Rightarrow t' = 0 \Rightarrow N_2(5; 0; -5)$$

Vậy $M_1(3; 0; 2)$, $N_1(-1; -4; 0)$ hay $M_2(1; 3; 0)$, $N_2(5; 0; -5)$.

Câu IV.

1. Tính tích phân :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$I = x^2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2I_1$$

$$\bullet \text{ Tính } I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I_1 = -x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\text{Vậy } I = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

2. Giải phương trình

$$\log_2 \frac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x \quad (1)$$

Điều kiện: $x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) - \log_2 x = 1 + x - 2^x$$

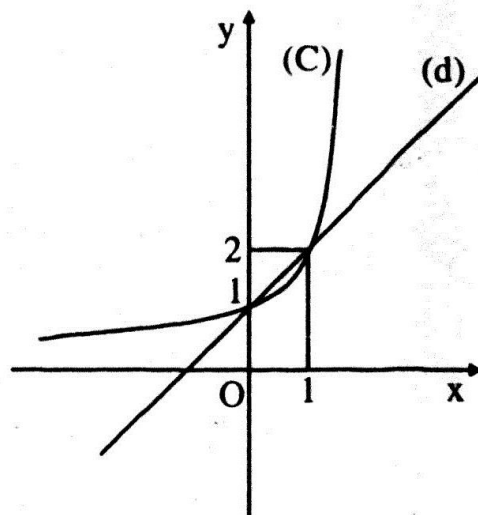
$$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) + (2^x - 1) = \log_2 x + x$$

Đặt $u = 2^x - 1$, $u > 0$

Ta có: $\log_2 u + u = \log_2 x + x \Leftrightarrow f(u) = f(x)$

Xét hàm đặt trưng: $f(t) = \log_2 t + t$, với $t > 0$

$$f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$$



$\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến $\forall t > 0$

Do đó: $f(u) = f(x) \Leftrightarrow u = x \Leftrightarrow 2^x - 1 = x \Leftrightarrow 2^x = x + 1$

Nhận xét. $x = 0; x = 1$ là hai nghiệm của phương trình

Khác: Đồ thị (C) của hàm số $y = 2^x$ lõm trên khoảng $(0; +\infty)$.

Do đó, đường thẳng (d): $y = x + 1$ chỉ cắt đồ thị (C) tối đa tại hai điểm.

Mà $x > 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$.

Câu Va

. Tìm số tự nhiên chẵn

Đặt $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Số cần tìm có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ ($a_1 \neq 0$)

Trường hợp 1. $a_4 = 0$

Chọn ba chữ số thuộc $X \setminus \{0\}$ xếp vào các vị trí còn lại: có A_6^3 cách

Trường hợp này có $A_6^3 = 120$ (số)

Trường hợp 2. $a_4 \neq 0$

Chọn $a_4 \in \{2; 4; 6\}$: có 3 cách

Chọn $a_1 \in X \setminus \{0; a_4\}$: có 5 cách

Chọn 2 chữ số thuộc $X \setminus \{a_1; a_4\}$ xếp vào hai vị trí còn lại có A_5^2 cách

Trường hợp này có: $3 \cdot 5 \cdot A_5^2 = 300$ (số).

Vậy có tất cả $120 + 300 = 420$ (số).

. Chứng minh d_1 và d_2 cắt nhau

Số giao điểm của d_1 và d_2 là số nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (m-1)x + (m-2)y + 2 - m = 0 \\ (2-m)x + (m-1)y + 3m - 5 = 0 \end{cases}$$

Ta có :

$$D = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ 2-m & m-1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 6m + 5$$

$$D_x = \begin{vmatrix} m-2 & 2-m \\ m-1 & 3m-5 \end{vmatrix} = 4m^2 - 14m + 12$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2-m & m-1 \\ 3m-5 & 2-m \end{vmatrix} = -2m^2 + 4m - 1$$

Do $D = 2\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0, \forall m \in \mathbb{R}$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Vậy d_1 và d_2 luôn luôn cắt nhau tại điểm P (đpcm).

• **Tìm m để PA + PB lớn nhất**

Tọa độ của P là:

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{4m^2 - 14m + 12}{2m^2 - 6m + 5} = 2 + \frac{2 - 2m}{2m^2 - 6m + 5} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2m^2 + 4m - 1}{2m^2 - 6m + 5} = -1 + \frac{4 - 2m}{2m^2 - 6m + 5} \end{cases}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{PA} = \left(-2 + \frac{2m - 2}{2m^2 - 6m + 5}, 2 + \frac{2m - 4}{2m^2 - 6m + 5} \right) \Rightarrow PA^2 = 8 - \frac{4}{2m^2 - 6m + 5}$$

$$\overrightarrow{PB} = \left(\frac{2m - 2}{2m^2 - 6m + 5}, \frac{2m - 4}{2m^2 - 6m + 5} \right) \Rightarrow PB^2 = \frac{4}{2m^2 - 6m + 5}$$

Suy ra: $PA^2 + PB^2 = 8$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$(PA + PB)^2 \leq 2(PA^2 + PB^2) = 16 \Rightarrow PA + PB \leq 4$$

$\Rightarrow \max(PA + PB) = 4$, đạt được khi $PA = PB$.

$$\Leftrightarrow PA^2 = PB^2 \Leftrightarrow 8 - \frac{4}{2m^2 - 6m + 5} = \frac{4}{2m^2 - 6m + 5}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = 1 \vee m = 2$.

Cách khác

d_1 và d_2 có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (m - 1; m - 2)$, $\vec{n}_2 = (2 - m; m - 1)$

Ta có: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (m - 1)(2 - m) + (m - 2)(m - 1) = 0 \Rightarrow d_1 \perp d_2$ tại P.

Nhận xét. $A \in d_1, B \in d_2$ và $AB = 2\sqrt{2}$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski, ta có:

$$(PA + PB)^2 \leq 2(PA^2 + PB^2) = 2AB^2 = 16 \Rightarrow PA + PB \leq 4$$

$\Rightarrow \max(PA + PB) = 4$, đạt được khi $PA = PB \Rightarrow \triangle PAB$ vuông cân tại P

$$\Rightarrow (\widehat{d_1, AB}) = 45^\circ.$$

Đường thẳng AB có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1)$

$$\text{Ta có: } \cos 45^\circ = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}_1|} \Leftrightarrow \frac{|2m-3|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(m-1)^2 + (m-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow (2m-3)^2 = 2m^2 - 6m + 5 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2. \end{cases}$$

Vậy giá trị cần tìm là: $m = 1 \vee m = 2$.

Câu Vb.

1. Giải phương trình:

$$2^{3x+1} - 7 \cdot 2^{2x} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0$$

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$

$$\text{Ta có: } 2t^3 - 7t^2 + 7t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)(2t^2 - 5t + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \\ 2^x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$.

2. Chứng minh $BM \perp B_1C$

Cho hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ, với O, O_1 lần lượt là trung điểm của BC và B_1C_1 .

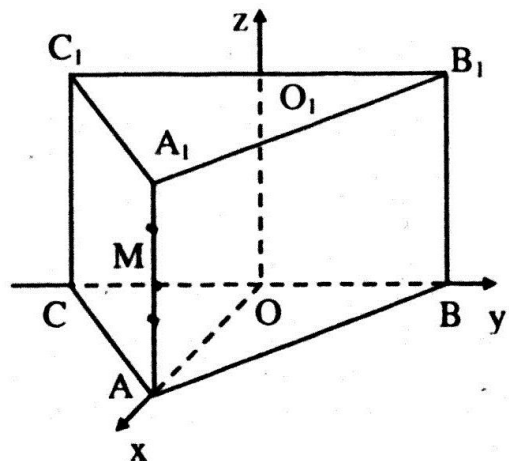
Tam giác ABC đều có cạnh là a nên $OA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\text{Ta có: } A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), C\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right)$$

$$A_1\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; a\right), B_1\left(0; \frac{a}{2}; a\right), C_1\left(0; -\frac{a}{2}; a\right)$$

M là trung điểm của đoạn AA_1 nên $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; 0; \frac{a}{2}\right)$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{BM} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{B_1C} = (0; -a; -a)$$



$$\text{và } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{B_1C} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \left(-\frac{a}{2}\right)(-a) + \frac{a}{2} \cdot (-a) = 0$$

Vậy $BM \perp B_1C$ (đpcm)

• **Tính khoảng cách giữa MB và B_1C**

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (0; -a; 0)$

$$\text{và } [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B_1C}] = \left(a^2; \frac{a^2\sqrt{3}}{2}; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và B_1C là:

$$d(BM, B_1C) = \frac{|[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B_1C}] \cdot \overrightarrow{BC}|}{|[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{B_1C}]|} = \frac{\left|-\frac{a^3\sqrt{3}}{2}\right|}{\sqrt{a^4 + \frac{3a^4}{4} + \frac{3a^4}{4}}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

MỤC LỤC

Trang

Đề 1.	3
Đề 2.	11
Đề 3.	18
Đề 4.	23
Đề 5.	30
Đề 6.	36
Đề 7.	44
Đề 8.	51
Đề 9.	57
Đề 10.	62
Đề 11.	68
Đề 12.	74
Đề 13.	80
Đề 14.	87
Đề 15.	93
Đề 16.	99
Đề 17.	106
Đề 18.	112
Đề 19.	118
Đề 20.	124
Đề 21.	130
Đề 22.	135
Đề 23.	141
Đề 24.	147
Đề 25.	154
Đề 26.	160
Đề 27.	166

Đề 28.	172
Đề 29.	178
Đề 30.	184
Đề 31.	189
Đề 32.	195
Đề 33.	201
Đề 34.	208
Đề 35.	213
Đề 36.	220
Đề 37.	225
Đề 38.	234
Đề 39.	243
Đề 40.	249
Đề 41.	255
Đề 42.	264
Đề 43.	271
Đề 44.	279
Đề 45.	287
Đề 46.	294
Đề 47.	300
Đề 48.	305
Đề 49.	311
Đề 50.	320
Đề 51.	328
Đề 52.	338
Đề 53.	348
Đề 54.	357